# 马尔科夫振荡问题

# THE MARKOV OSCILLATION PROBLEM

戴永隆 著

广东科技出版社

# 马尔科夫振荡问题

戴永隆　著

广东科技出版社

粤新登字 04 号

Maerkefu Zhendang Wenti

# 马尔科夫振荡问题

编 著 者：戴永隆
出版发行：广东科技出版社
（广州市环市东路水荫路 11 号）
经　　销：广东省新华书店
印　　刷：粤中印刷公司印刷
规　　格：787×1092　1/32　印张：8　字数：19.5 万字
版　　次：1993 年 3 月　第 1 版
1993 年 3 月　第 1 次印刷
印　　数：1—1000 册
ISBN 7-5359-1004-1/O.67
定　　价：12.00 元

本书承广东优秀科技专著出版基金会推荐与资助出版




广东优秀科技专著出版基金会

# THE MARKOV OSCILLATION PROBLEM

by

DAI YONGLONG

Guangdang Science & Technology Press, China

**First Edition** 1993

ISBN



Published by
Guangdong Science & Technology Press
13F. 11 Shuiyinlu Huangshi Donglu, Guangzhou 510075, P. R. China

# 告读者

现代世界的特点是，科学技术已成为综合国力的基础，许多国家都把增强科技实力，夺取科技优势，作为自己国家的重要国策和发展战略的核心。人们预测，在未来二十、三十年里，将是人类社会发展史上的一个巨大变革时期，这是因为，现代科学运动正在引发出生产力的巨大发展。谁掌握了科技进步的制高点，谁就掌握发展国民经济的制高点，谁就可以在以科技为基础的综合国力的国际竞争中处于领先地位。

那么，怎样传播科技进步的信息使之引发生产力的进步呢？应该说，在众多信息传递工具中，图书仍然是最有力的载体。可惜，由于种种原因，一个时期以来，图书出版难，科学专著出版更加困难！

问题已经到了非解决不可的时候了！

广东地处我国改革、开放的前沿阵地，又是我国改革、开放先行一步的地区，历史的责任是不容推托的。有鉴于此，1989年，广东科技出版社发起成立广东优秀科技专著出版基金会，为解决科技学术著作出版难的问题，开辟一个新途径。这一倡议，得到科技界、新闻出版界和大专院校的专家、学者以及关心科技事业的人士的热烈响应和支持，并且得到广东省领导部门、社会各界以及海外、港、澳的企业、社会团体、个人的慷慨赞助。在大家的支持下，基金会于1989年10月正式成立，以钱伟长教授为首的一批知名的专家、教授热心地承担了基金会的顾问、评审委员工作，共同商定基金会扶持优秀科技专著出版的原则：依靠专家、公平竞争、择优支持，每年推荐一批符合要求的优秀科技与经济管理专著稿在广东科技出版社出版。基金会希望，通过缓解科技专著出版难，推动广东乃至我国科技事业的发展。

基金会成立以来，从本省以至首都、从海滨以至西北高原，为科学而献身的可敬的作者，纷纷送来珍贵的手稿，其中，许多是他们大半生心血凝聚成的精华；只是由于时间仓促，现在奉献给读者的著作，还未能完全做到遴选和出版来稿中最优秀的部分，不过，我们决心不停顿地努力下去，让更多优秀的科技著作陆续问世。

我们希望海内外各界人士继续大力支持广东优秀科技专著出版基金会的工作，向基金会推荐优秀科技专著；为基金会提供资金、条件；使基金会能在更广阔范围内，资助优秀科技专著的出版，在发展我国科技事业和迎接世界新技术革命挑战中，作出自己的贡献。

广东优秀科技专著出版基金会

# 广东优秀科技专著出版基金会
# 顾问、评审委员会

# THE MARKOV OSCILLATION PROBLEM

DAI YONGLONG

(*Dept. Math. Zhongshan Univ. Guangzhou, China*)

ABSTRACT

1 . THE PROBLEM

Let $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ be a probability space. A stochastic process $Z=(Z(t);\ t>0)$, taking the values 0 and 1, is said to be a regenerative phenomenon if there exists a function $p$ on $(0,\infty)$ (called the $p$-function of Z) such that, whenever

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n,$$

we have

$$P(Z(t_1) = Z(t_2) = \cdots = Z(t_n) = 1) = \prod_{r=1}^{n} p(t_r - t_{r-1})$$

A $p$-function $p(\cdot)$ is said to be standard if

$$\lim_{t\to 0} p(t) = 1.$$

We denote by $\mathscr{P}$ the class of all standard $p$-functions.

In 1968 R. Davidson posed the following tantalizing problem. Suppose $p\in\mathscr{P}$ with $p(1)=M$, $0<M<1$. How small is $m=\inf(\ p(t);\ (0\leqslant t\leqslant 1)$? In other words, what pairs of $(m,M)$ can occur?

As a special case of the above problem R. Davidson considered the following problem. For $p\in\mathscr{P}$, $0<M<1$. define

$$m(p) = \inf\ (p(t);\ 0 \leqslant t \leqslant 1),$$

$$I(M) = \inf\ (m(p);\ P \in \mathscr{P}, p(1) = M),$$

$$v_\infty = \inf\ (M;\ I(M) > 0).$$

Davidson first proved that $v_\infty \geqslant 1/e$ and conjectured that

$$v_\infty = 1/e.$$

For more than two decades this conjecture has remained unproved but some upper bounds of $v_\infty$ have been obtained by many reseachers.

In 1968 Davidson proved that $v_\infty \leqslant 3/4$, and which was independently proved by Blackwell and Freedman;

In 1973 Griffeath proved that $v_\infty \leqslant 2/3$;

In 1973 Cornish proved that $v_\infty \leqslant 1-1/e$;

In 1975 Joshi proved that $v_\infty \leqslant 0.59$;

In 1977 Joshi proved a better result: $v_\infty \leqslant 0.56$;

In 1984 Yu Yaoqi proved $v_\infty \leqslant 0.515$;

In 1986 Zou Jiezhong proved $v_\infty \leqslant 1/2$.

Up to 1990 the best result was $v_\infty \leqslant 1/2$.

## Ⅱ. THE MAIN RESULT

In papers [3~6] we used a new method to study the Markov oscillation problem. The most important result of these papers is that, we have succeeded in proving the above Davidson's conjecture completely.

Our final result is the following theorem which was proved in [6].

THEOREM. For any $p \in \mathscr{P}$ we have

$$p(t) \leqslant p(s) + 1/e, \qquad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \infty.$$

As a direct consequence of this theorem we immediately get

COROLLARY. $v_\infty \leqslant 1/e$.

## REFERENCES


1. A. G. Cornish, Bounds for $p$-functions, Bull. London Math. Soc. 5 (1973), 169~175.
2. Dai Yonglong, On Kingman's inequalities, Acta Sci. Nat. Univ. Sun. (1987,No 4), 1~4(Chinese).
3. Dai Yonglong, The oscillation of $p$-functions with exponential start, Chin. J. Appl. Prob. Stat. 5(1989), 161~172(Chinese).

4. Dai Yonglong & Zou Jiezhong, On the oscillation problem of $p$-functions I-III, Chin. J. Appl. Prob. Stat. 6(1990), 77～88, 161～173, 302～308. (Chinese).

5. Dai Yonglong, The Maximal value problem of $p$-functions, Chin. J. Appl. Prob. Stat. 7(1991), 311～322(Chinese).

6. Dai Yonglong, The Maximal oscillation problem of $p$-functions, Chin. J. Appl. Prob. Stat. 7(1991), 415～424 (Chinese).

7. Dai Yonglong, The Markov oscillation problem (English, to appear).

8. R. Davidson, Arithemtic and other properties of certain Delphic semigroups, Z. W. V. G. 10(1968), 120～172.

9. D. Griffeath, The maximal oscillation problem for regenerative phenomena, Ann. Prob. 1(1973), 405～416.

10. V. M. Joshi, A new bound for standard $p$-functions, Ann. Prob. 3 (1975), 346～352.

11. V. M. Joshi, An improved upper bound for standard $p$-functions, Ann. Prob. 5(1977), 999～1003.

13. Yu Yaoqi, The new results of the bound of the standard $p$-functions, Chin. Ann. Math. 5A(1984). 473～482(Chinese).

14. Zou Jiezhong, The oscillation problem for $p$-functions, D. Phil. Thesis, 1986(Chinese).

15. D. Blackwell & D. Freedman, On the behaviour of Markov transition probabilities, Ann. Math. Stat. 39(1968), 2123～2127.

# 目　　录

# CONTENTS

# 引　　论

在概率论与随机过程的诸多分支中,马氏过程有它特殊重要的地位:有比较完整的基础理论;有非常丰富的研究内容;在数学和一些其它自然科学领域里有着广泛的应用和应用前景;是一支已经相当成熟并在继续迅速发展的分支学科.

作为马氏过程的重要组成部分,马氏链的研究一直十分活跃.在这一领域,早期提出的某些基本问题已经取得了完满的结果或者获得了重要的进展.例如存在性问题与唯一性问题就已经被彻底解决而大致告一段落.马氏链的构造问题也已经获得了丰硕的研究成果.概括这一理论的重要专著有 Chung (1967)、Hou (1982b)和 Yang (1986).

随着马氏过程理论研究的步步深入,新的研究课题与研究方法不断涌现.早在60年代,以剑桥大学为中心的一批英国数学家(如D. G. Kendall, J. K. C. Kingman, G. E. H. Reuter 和 R. Davidson 等)就提出了一系列扩展马氏过程理论或者与其相关的值得深刻研究的问题.这些问题不仅大大地丰富了马氏过程的研究内容,而且提供了新的研究方法.下面我们仅仅介绍与本书密切相关的两个问题.

为了叙述方便,首先略述某些熟知的定义.

设 $S$ 是可列集.$(p_{ij}(t),\ t\geqslant 0\ ,\ i,j\in S)$ 称为标准马氏链,如果对任意 $i,j\in S\ ,s,\ t\geqslant 0$ ,有

$$(1)\qquad p_{ij}(t)\geqslant 0\ ,\quad \sum_{j\in S}p_{ij}(t)\leqslant 1.$$

(2) $$p_{ij}(t+s)=\sum_{k\in S}p_{ik}(s)p_{kj}(t).$$

(3) $$\lim_{t\downarrow 0}p_{ij}(t)=p_{ij}(0)=\delta_{ij}=\begin{cases}0, & 当\ i\neq j\\ 1, & 当\ i=j.\end{cases}$$

现设$(E,\mathscr{E})$是任意可测空间，其中$\sigma$代数$\mathscr{E}$包含$E$的一切单点集．称$P(t,x,A)$（$t\geqslant 0$，$A\in\mathscr{E}$）是马尔科夫转移函数，如果它满足

i）固定$t\geqslant 0$，$x\in E$，$P(t,x,\cdot)$是$\mathscr{E}$上的非负测度（今后我们简称非负测度为测度），且$P(t,x,E)\leqslant 1$；

ii）固定$t\geqslant 0$，$A\in\mathscr{E}$，$P(t,\cdot,A)$是$\mathscr{E}$可测函数；

iii）对一切$s\geqslant 0,t\geqslant 0,x\in E,A\in\mathscr{E}$成立

(4) $$P(t+s,x,A)=\int P(s,x,dy)P(t,y,A).$$

对给定的马尔科夫转移函数$P(t,x,A)$（$t\geqslant 0$，$x\in E$，$A\in\mathscr{E}$），如果对某$x\in E$成立

(5) $$\lim_{t\downarrow 0}P(t,x,\{x\})=1$$

则称$x$是标准点．如果任意$x\in E$都是标准点，则称$P(\cdot,\cdot,\cdot)$是跳过程转移函数．

现在我们叙述问题Ⅰ．

**问题 Ⅰ**

假定$B(t)$是定义在$[0,\infty)$上的一个函数．问题是：

i）$B$应具备什么特征，才存在马氏链（$p_{ij}(t)$，$t\geqslant 0$，$i,j\in S$）及状态$i_0,j_0$使

(6) $$p_{i_0j_0}(t)=B(t)\ ?$$

ii）$B$应具备什么特征才存在马尔科夫转移函数$P(t,x,A)$（$t\geqslant 0$，$x\in E$，$A\in\mathscr{E}$）及$x_0\in E$，$A_0\in\mathscr{E}$使

(7) $$P(t,x_0,A_0)=B(t)\ ?$$

这是一个十分困难的问题,英国数学家 J. F. C. Kingman 花了7年的时间,仅仅获得上述问题的部分解答. 然而,他获得的结果是极其漂亮的,英国数学家 Kendall 在"随机分析"( D. G. Kendall and E. F. Harding 1973) 一书的引言中,给 Kingman 的这一研究工作以很高的评价. 现在我们就来叙述他所获得的两个完美的结果.

为此,我们首先叙述定义在$[0,\infty)$的两个函数类.

我们恒以$\mathscr{P}$记定义在$[0,\infty)$上而且满足下述条件的全体函数.

i) $p\in\mathscr{P}$, 则 $p$ 在 $[0,\infty)$ 上连续;

ii) $p\in\mathscr{P}$, 则 $p$ 的拉氏变换存在且有形式

(8) $$\hat{p}(\theta)=\int_0^\infty p(t)e^{-\theta t}dt=\left(\theta+\int_{(0,\infty]}(1-e^{-\theta x})\mu(dx)\right)^{-1},\quad \theta>0,$$

其中 $\mu$ 是$(0,\infty]$上的测度($\mu(\{\infty\})$ 可能$>0$), 它满足条件

(9) $$\int_{(0,\infty]}(1-e^{-x})\mu(dx)<\infty.$$

以 $\mathscr{P}_M$ 记定义在 $(0,\infty]$ 上而且满足下列条件的全体函数:

i) $p\in\mathscr{P}_M$,则 $p$ 在 $[0,\infty)$ 上连续;

ii) $p\in\mathscr{P}_M$,则 $p$ 的拉氏变换存在且有形式

(10) $$\hat{p}(\theta)=\int_0^\infty p(t)e^{-\theta t}dt=\left(\theta+a+\int_0^\infty(1-e^{-\theta t})f(t)dt\right)^{-1},\quad \theta>0,$$

其中 $a\geqslant0$ 是常数,而 $f$ 是 $(0,\infty)$ 上的函数且满足

a) $f$ 在 $(0,\infty)$ 上是下半连续的;

b) $\int_0^\infty(1-e^{-t})f(t)dt<\infty$;

c) 或者 $f\equiv 0$，或者对一切 $t>0, f(t)>0$；

d) 如果 $f\not\equiv 0$，则存在 $\beta>0$ 使

$$f(t)\geqslant e^{-\beta t},\qquad t>1.$$

显然，$\mathscr{P}_M\subset\mathscr{P}$（令 $\mu(\{\infty\})=a, \mu(A)=\int_A f(t)dt$，其中 $\infty\notin A$，(10) 就变成(8)）.

下述结果见书后参考文献(J. F. C. Kingman (1971)).

**命题** I

*假定 $B(\cdot)$ 是定义在 $[0,\infty)$ 上的函数，则存在马氏链 $(p_{ij}(t), t\geqslant 0, i,j\in S)$ 及状态 $a\in S$ 使*

$$p_{aa}(t)=B(t),\qquad t\geqslant 0,$$

*的充要条件是：$B\in\mathscr{P}_M$.*

命题 I 所描述的特征，称为马氏链对角线元的特征刻划（我们将马氏链 $(p_{ij}(t), t\geqslant 0, i,j\in S)$ 的任意元 $p_{ii}(\cdot), i\in S$ 称为对角线元，而 $p_{ij}(\cdot), i\neq j$ 称为非对角线元）.

命题 I 表明，虽然马氏链的构造问题远未解决而一直困扰着概率论学者，但是所有马氏链（不管是否稳定）的对角线元却被全部构造了出来. 由此人们会自然地提出：如何刻划马氏链的非对角线元？换言之，问题 1 中关于马氏链的对角线元的部分已彻底解决，而对于非对角线元的特征刻划则仍是一个未解决的问题. 如果这个问题获得解决，相信对马氏链的构造问题的最后解决会有很大的帮助.

命题 I 的结论对 Polish 空间上的跳过程转移函数也是正确的，这时它可以表述为：

**命题 Ⅰ′** （见 Kingman （1972）中定理 7.5）

设 $E$ 是一 Polish 空间，$\mathscr{E}$ 是 $E$ 的全体 Borel 集类．又设 $p(t,x,A)$（$t\geqslant 0, x\in E, A\in\mathscr{E}$）是跳过程转移函数，则对任意 $x\in E$ 有

$$p(\cdot,x,\{x\})\in\mathscr{P}_M.$$

对跳过程转移函数 $p(\cdot,\cdot,\cdot)$，固定 $x\in E$，我们也称（$p(t,x,\{x\}),t\geqslant 0$）是 $p(\cdot,\cdot,\cdot)$ 的对角线元，因此，如果 $E$ 是 Polish 空间，$(E,\mathscr{E})$ 上的跳过程转移函数的对角线元属于 $\mathscr{P}_M$，如果 $E$ 不是 Polish 空间，命题 Ⅰ′的结论尚未被证明．

**命题 Ⅱ** （见 Kingman （1972）中定理 7.1）

假定 $B(\cdot)$ 是定义在$[0,\infty)$上的函数．则存在可测空间 $(E,\mathscr{E})$，马尔科夫转移函数 $P(t,x,A)$（$t\geqslant 0$，$x\in E$，$A\in\mathscr{E}$）和标准点 $x_0\in E$ 使

$$p(t,x_0,\{x_0\})=B(t)$$

的充要条件是：$B\in\mathscr{P}$.

命题 Ⅱ 刻划了马尔科夫转移函数全体标准点对角线元．从定义容易看出 $\mathscr{P}_M\subset\mathscr{P}$ 但 $\mathscr{P}_M\neq\mathscr{P}$．由命题 Ⅰ′和命题 Ⅱ 立即推出：如果 $E$ 是 Polish 空间，而 $P(t,x,A)$（$t\geqslant 0$，$x\in E$，$A\in\mathscr{E}$）是马尔科夫转移函数，$x_0$是标准点，$p(\cdot,x_0,\{x_0\})\in\mathscr{P}$ 但 $p(\cdot,x_0,\{x_0\})\notin\mathscr{P}_M$，则 $p(\cdot,\cdot,\cdot)$ 不是跳过程转移函数，即必定存在非标准点．

本书的研究对象就是 $\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{P}_M$．对于 $\mathscr{P}$，在第二章我们将要

重新用所谓“再生现象”的随机过程来定义它．并称 $p\in\mathscr{P}$ 是标准 $p$- 函数，而 $p\in\mathscr{P}_M$ 则是一个特殊的标准 $p$- 函数．从定义表面上看，$\mathscr{P}$ 似乎比 $\mathscr{P}_M$ 要“大”得多，但在第二章我们将要证明，在 $[0,\infty)$ 上逐点收敛的意义之下，$\mathscr{P}_M$ 在 $\mathscr{P}$ 中稠，即对任意 $p\in\mathscr{P}$，必定存在 $\mathscr{P}_M$ 中的序列 $p_n, n=1,2,\cdots$，使

$$(11)\qquad p(t)=\lim_{n\to\infty}p_n(t),\qquad t\geqslant 0.$$

值得一提的是：在上面我们是用纯分析方法定义函数类 $\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{P}_M$ 的．但是证明 $\mathscr{P}_M$ 在 $\mathscr{P}$ 中稠（逐点收敛意义下）的结论，却很难避开概率论的术语和方法，这说明应用概率方法解决分析问题是确实有效的．

现在我们叙述问题 I．

**问题 I**

设 $p\in\mathscr{P}$，则 $p$ 在 $[0,\infty)$ 上连续，而且由命题 II 知，$0\leqslant p(t)\leqslant 1$（$0\leqslant t<\infty$），和 $p(0)=1$．令

$$(12)\qquad m(p)=\min\,(p(t)\,:\,0\leqslant t\leqslant 1).$$

现对任意固定的 $a$，$0<a<1$，令

$$(13)\qquad G(a)=\sup\,(p(1)-a;\,m(p)=a\,,\,p\in\mathscr{P}).$$

由于对任意 $0\leqslant q<\infty$ 函数

$$(14)\qquad B(t)=e^{-qt},\qquad 0\leqslant t<\infty.$$

属于 $\mathscr{P}$（事实上，$B\in\mathscr{P}_M$．证明这一点只须在(10)中令 $f\equiv 0, a=q$ 即可）．因此(13)式右边括号中的集合 $(m(p)=a, p\in\mathscr{P})$ 对任意 $0<a<1$ 都是非空的，从而 $G(a)$ 存在．

我们现在提出的问题是

$$(15)\qquad G(a)=?,\qquad 0<a<1.$$

求函数 (15) 是极其困难的．至今未获得令人感兴趣的结果．

由于(15)的解是如此困难，Davidson，Kendall 等人提出下面的特殊情形. 令

(16) $$v_\infty = \lim_{a \downarrow 0} G(a).$$

(为什么采用记号 $v_\infty$，请参看第四章). Davidson，Kendall 等人极力主张研究下面的问题：

(17) $$v_\infty = ?$$

然而问题 (17) 仍然是一个极其困难的问题. 在介绍问题 (17) 的研究进展情况之前，我们首先略述 (15) 与 (17) 的实际意义.

设 $p \in \mathscr{P}$，对任意固定的 $0 < b < \infty$，令

(18) $$\tilde{p}(t) = p(bt), \qquad t \geqslant 0.$$

则由定义立即见到：$\tilde{p} \in \mathscr{P}$. $\tilde{p}$ 只是 $p$ 的一个尺度变换. 因此在定义 (13) 中，点 1 可取为任意 $b$，$0 < b < \infty$. 换言之，若令

(19) $$m(p,b) = \min (p(t); 0 \leqslant t \leqslant b)$$

(20) $$G(a,b) = \sup (p(b) - a;\ m(p,b) = a,\ p \in \mathscr{P})$$

则有

(21) $$G(a,b) = G(a), \qquad 0 < b < \infty.$$

现在由 (13) 及 (21) 容易见到：对任意 $p \in \mathscr{P}$ 必有

(22) $$p(t) \leqslant p(s) + G(p(s)), \qquad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \infty.$$

然而对任意 $\varepsilon > 0$，任意 $0 < a < 1$ 及任意 $0 < t < \infty$，总存在 $p \in \mathscr{P}$ 及 $0 < s < t$ 使

(23) $$p(s) = a, \text{ 且 } p(t) > a + G(a) - \varepsilon.$$

(22)与 (23) 表明，对任意 $p \in \mathscr{P}$，如果 $p(s) = a$，则在 $(0,\infty)$ 内，$p$ 不能超过 $a + G(a)$. 然而又可以无限接近 $a + G(a)$. 因此求 $G(a)$ 的问题被称为标准 $p$- 函数的最大振幅问题（严格说来，应称为“右边向上”的最大振幅问题）. 由于本书证明了下面的(24)和

(25)，$v_\infty$被称为标准 $p$ 函数的最大振幅就是非常自然的.

还应当指出，由于 $\mathscr{P}_M$ 在 $\mathscr{P}$ 中稠（在逐点收敛的意义下），因此将上面讨论中的 $\mathscr{P}$ 全改为 $\mathscr{P}_M$ 仍然正确，换言之，$v_\infty$也是 $\mathscr{P}_M$ 的最大振幅.

下面我们介绍 $v_\infty$的研究进展.

1968年，Daviason(1968) 首先证明 $v_\infty \geqslant 1/e$ 并提出如下猜测：

(24) $$v_\infty = 1/e.$$

1968年，Daviason(1968) 与 Blackwell and Freedman(1968)同时证明：$v_\infty \leqslant \frac{3}{4}$；

1973年，Griffeath 证明：(见 Daviason(1973b)，APPENDIX C) $v_\infty \leqslant 2/3$；

1973年，Cornish (1973a) 证明：$v_\infty \leqslant 1-1/e$；

1975年，Joshi(1975) 证明：$v_\infty \leqslant 0.59$；

1977年，Joshi(1977a) 进一步证明：$v_\infty \leqslant 0.56$；

1984年，Yu Yaoqi(余耀祺) (1984) 改进了 Joshi 的方法，用迭代程序算出 $v_\infty \leqslant 0.515$；

1986年，Zou Jiezhong (邹捷中)(1986) 进一步改进了 Joshi 和 Yu Yaoqi 的方法证明了 $v_\infty \leqslant \frac{1}{2}$.

上述结果全部是用 Kingman 不等式理论(见本书第四章)获得的. 然而，继续使用 Kingman 不等式理论研究 $p$- 函数的振荡问题遇到了难以克服的困难（见第四章有关结果的证明）. 作者虽然不认为应用 Kingman 不等式理论研究 $p$- 函数的振荡问题已经完全走到了尽头，但至少可以认为，应用由 Joshi 提出然后由 Yu Yaoqi 所改进的方法已经难以在 $p$- 函数振荡问题获得新的结果了.

因此，创造新的研究方法势所必然.

本书作者建立了研究 $p$- 函数振荡问题的新方法（见 Dai Yonglong（1989，1991a，b）和 Dai Yonglong and Zou Jieshong（1990a，1990b，1990c）），应用这一方法，最后终于证明了

$$G(a) \leqslant 1/e, \qquad 0 < a < 1. \tag{25}$$

由(25)和定义(16)立即得到 Davidson 的猜想(24)（因为 Davidson 已证 $v_\infty \geqslant 1/e$）.

上面所述概括为：问题 Ⅰ 指出本书的研究对象来源于马氏过程和马氏链. 所谓 $p$-函数振荡问题，就是马氏过程和马氏链对角线元的振荡问题. 因此本书定名为"马尔科夫振荡问题"（文献上"$p$-函数振荡问题"与"马尔科夫振荡问题"的术语并用）. 问题 Ⅱ 指出本书的具体研究对象就是 $p$-函数的最大振幅问题. 值得指出的是，文献上多次提到：这是一个最吸引人的问题之一. 例如，见 Kendall and Harding（1973），该书引言称这个问题是标准 $p$-函数最吸引人的问题之一. 又可见 Cornish（1987），这是一篇专门论述马尔科夫振荡问题的综述文章，主要介绍 Joshi 的工作，该文开头第一句话就说，这是 Davidson 于1986年提出来的一个吸引人的问题.

最后简述一下本书的结构.

第一、二、三章叙述本书研究对象的基本理论. 这个叙述不是包罗一切的，例如本书引论所述问题 Ⅰ 中的命题 Ⅰ 和命题 Ⅱ 就没有包括进去. 因为本书是作者的研究专著，对于解决振荡问题不直接用到的结果就不叙述.

第四章专门叙述应用 Kingman 不等式理论解决振荡问题的方法. 虽然应用本方法目前无法得到最好的结果，但是作为振荡问题研究历史的一个方面也是值得重视的. 读者也许能从这一方法获得新的启发而得出更好的结果.

最后五、六、七章基本上是作者的研究工作.这里也有作者与合作者的部分研究工作(Dai Yonglong and Zou Jiezhong(1990a,b,c)),但是主要结果来源于 Dai Yonglong (1989,1991a,1991b).

本书每章后面都有简短的文献注释.基本上标明全书主要结果的出处.

本书有几章后面列举了几个未解决的问题.这些问题大多与 Davidson 猜测差不多时间提出来的,也有个别问题是作者提出的.作者认为,解决这些问题中的任何一个都有学术价值.

## 致谢

华东师范大学魏宗舒教授,中山大学梁之舜教授和北京师范大学严士健教授对作者的研究工作和本书出版一向十分关心和大力支持.这给作者以很大的鼓舞;

何声武教授(华东师范大学),汪嘉冈教授(华东化工学院),严士健教授,邹捷中博士(长沙铁道学院),刘秀芳教授(北京师范大学)详细审阅了作者的研究工作并提出了一系列修改意见;

何远江博士(中山大学)逐字逐句校阅了本书原稿,提出了包括简化证明和书写形式方面的许多修改意见.

在此,作者向上述诸位表示衷心的感谢.

作者同时感谢大力支持本书出版的广东科技出版社,特别是郑丽华女士.

最后指出,本书所涉及的研究课题部分地得到国家自然科学基金委员会、国家教委博士点基金和中山大学高等学术研究中心基金会的资助。

# 第一章　更新序列与马氏链

## §1　分析方法

### 1. 随机矩阵

设 $S$ 是可列或有限集. 一个矩阵

$$P = (p_{ij}, i, j \in S)$$

称为随机矩阵,如果它的元素满足条件:

$$p_{ij} \geqslant 0 \ (i, j \in S) \ , \ \sum_{j \in S} p_{ij} = 1 \ (i \in S)$$

本书今后恒以 $N$ 记全体正整数集,即 $N = (1, 2, \cdots)$, 而以 $\overline{N}$ 记全体非负整数集,即 $\overline{N} = (0, 1, 2, \cdots)$.

对于随机矩阵 $P = (p_{ij}, i, j \in S)$,以及任意的 $n \in \overline{N}$,我们用下述方式归纳地定义它的 $n$ 次幂:

(1)　$$P^0 = I \ , \ P^1 = P \ , \ P^n = P^{n-1}P \ , \qquad n \geqslant 2.$$

其中 $I$ 是单位矩阵,于是 $P^0$ 的元素是

(2)　$$p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

而 $P^n$( $n \in N$)的元素用矩阵形式写成:

$$P^n = (p_{ij}^{(n)}, i, j \in S).$$

按照矩阵乘法,显然有

(3) $$p_{ij}^{(n)} = \sum_{i_1,\cdots,i_{n-1}\in S} p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}j}, \qquad n\in N.$$

因此,我们有

$$\sum_{j\in S} p_{ij}^{(n)} = 1, \qquad n\in N.$$

从而 $P^n$ 仍是随机矩阵.

其次,对任意 $i,j\in S$ 及 $n,m\in \overline{N}$,显然有

(4) $$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}.$$

或者写成更简单的矩阵乘积公式:

$$P^{n+m} = P^n P^m, \qquad n,m\in \overline{N}.$$

**定理 1**

设 $P$ 是随机矩阵,固定 $a\in S$,并命

(5) $$u_n = p_{aa}^{(n)}, \qquad n\in \overline{N}.$$

则 $u_0=1$ 且存在非负数列 $(f_n,n\in N)$ 满足条件

(6) $$\sum_{n\in N} f_n \leqslant 1$$

和

(7) $$u_n = \sum_{k=1}^{n} f_k u_{n-k}, \qquad n\in N.$$

**证**: 令

$$f_1 = u_1,$$

$$f_k = \sum_{i_1\neq a,\cdots,i_{k-1}\neq a} p_{ai_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{k-1}a}, \quad k\geqslant 2.$$

对任意 $n\geqslant 2$ ,我们有

$$1 = \sum_{j\in S} p_{aj}^{(n)} = \sum_{j\in S}\sum_{i_1,\cdots,i_{n-1}\in S} p_{ai_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}j}$$

$$= \sum_{j\in S} p_{aa} \sum_{i_2,\cdots,i_{n-1}\in S} p_{ai_2}\cdots p_{i_{n-1}j}$$

$$+ \sum_{j\in S}\sum_{i_1\neq a} p_{ai_1} \sum_{i_2,\cdots,i_{n-1}\in S} p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}j}$$

$$= f_1 + \sum_{j\in S}\sum_{i_1\neq a} p_{ai_1}p_{i_1a} \sum_{i_3,\cdots,i_{n-1}\in S} p_{ai_3}\cdots p_{i_{n-1}j}$$

$$+ \sum_{j\in S}\sum_{i_1\neq a,i_2\neq a} p_{ai_1}p_{i_1i_2} \sum_{i_3,\cdots,i_{n-1}\in S} p_{i_2i_3}\cdots p_{i_{n-1}j}$$

$$= f_1 + f_2 + \sum_{j\in S}\sum_{i_1\neq a,i_2\neq a} p_{ai_1}p_{i_1i_2} \sum_{i_3,\cdots,i_{n-1}\in S} p_{i_2i_3}\cdots p_{i_{n-1}j}$$

$$= f_1 + \cdots + f_{n-1} + \sum_{j\in S}\sum_{i_1\neq a}\cdots\sum_{i_{n-1}\neq a} p_{ai_2}\cdots p_{i_{n-1}j}$$

$$= f_1 + \cdots + f_n + \sum_{j\neq a}\sum_{i_1\neq a}\cdots\sum_{i_{n-1}\neq a} p_{ai_2}\cdots p_{i_{n-1}j}$$

$$\geqslant f_1 + \cdots + f_n.$$

由于上述递推计算对任意 $n\in N$ 成立. 从而(6)式成立，往证(7)，显然 $u_1=p_{aa}=f_1$. 其次

$$u_2 = p_{aa}^{(2)} = \sum_{j\in S} p_{aj}p_{ja} = p_{aa}^2 + \sum_{j\neq a} p_{aj}p_{ja} = f_1u_1 + f_2.$$

对 $n>2$，应用公式(4)，我们有

$$u_n = p_{aa}^{(n)} = \sum_{i_1\in S} p_{ai_1}p_{i_1a}^{(n-1)}$$

$$= p_{aa}p_{aa}^{(n-1)} + \sum_{i_1\neq a} p_{ai_1}p_{i_1a}^{(n-1)}$$

$$= p_{aa}p_{aa}^{(n-1)} + \sum_{i_1\neq a} p_{ai_1}p_{i_1a}p_{aa}^{(n-2)} + \sum_{i_1\neq a}\sum_{i_2\neq a} p_{ai_1}p_{i_1i_2}p_{i_2a}^{(n-2)}$$

$$= p_{aa}p_{aa}^{(n-1)} + \sum_{i_1\neq a} p_{ai_1}p_{i_1a}p_{aa}^{(n-2)} + \cdots$$

$$+\sum_{i_1\neq a}\cdots\sum_{i_{n-2}\neq a}p_{ai_1}\cdots p_{i_{n-2}a}p_{aa}$$

$$+\sum_{i_1\neq a}\cdots\sum_{i_{n-1}\neq a}p_{ai_1}\cdots p_{i_{n-1}a}$$

$$=f_1u_{n-1}+f_2u_{n-2}+\cdots+f_{n-1}u_1+f_n. \qquad \#$$

## 2. 更新序列

如果非负实数序列$(u_n,n\in\overline{N})$满足条件

A. $u_0=1$.

B. 存在非负实数序列$(f_n,n\in N)$，$\sum_{n\in N}f_n\leqslant1$，使

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}f_k u_{n-k} \tag{8}$$

对任意 $n\in N$ 成立，则称$(u_n, n\in\overline{N})$是更新序列，而对应的$(f_n,n\in N)$称为 $u$ 的 $F$ 序列.

今后我们以 $\mathscr{R}$ 记全体更新序列.

由定理 I 知，如果 $P=(p_{ij},i,j\in S)$是随机矩阵，对任意 $a\in s$，令

$$u_n=p_{aa}^{(n)},\qquad n\in\overline{N}.$$

则$(u_n, n\in\overline{N})\in\mathscr{R}$，现在我们证明相反的结论.

**定理 I**

设 $u=(u_n, n\in\overline{N})\in\mathscr{R}$，则存在 $S$ 上的随机矩阵 $P=(p_{ij},i,j\in S)$及 $a\in S$ 使

$$u_n=p_{aa}^{(n)},\qquad n\in\overline{N}. \tag{9}$$

**证**：以$(f_n,n\in N)$记 $u$ 的 $F$ 序列，令

$$g_0 = 1, g_n = 1 - \sum_{i=1}^{n} f_i, \qquad n \geqslant 1.$$

定义

$$L = \sup(n: g_n > 0).$$

并取 $S$ 如下：当 $L<\infty$，取 $S=(0,1,\cdots,L)$，当 $L=\infty$时，取 $S=(0,1,2,\cdots)$.

现在令

$$p_{ij} = \begin{cases} g_{i+1}/g_i, & j = i+1, j \in S \\ f_{i+1}/g_i, & j = 0, \\ 0, & \text{其余的 } i, j \in S. \end{cases}$$

容易证明$(p_{ij}, i, j \in S)$ 是随机矩阵. 事实上，注意 $g_0=1$，则

$$\sum_{j \in S} p_{0j} = p_{00} + p_{01} = f_1/g_0 + g_1/g_0 = 1.$$

而对任意 $i \in S$ 且 $i \neq 0$，有

$$\sum_{j \in S} p_{ij} = p_{i0} + p_{i,i+1} = f_{i+1}/g_i + g_{i+1}/g_i = 1.$$

从而 $P=(p_{ij}, i, j \in S)$是随机矩阵.

现取 $a=0$，我们要证明 $u_n = p_{00}^{(n)} (n \in \overline{N})$，事实上，$p_{00}^{(0)} = 1 = u_0$，$p_{00} = f_1/g_0 = f_1 = u_1$. 而当 $n \geqslant 2$ 时有

$$p_{00}^{(n)} = p_{00} p_{00}^{(n-1)} + p_{01} p_{10} p_{00}^{(n-2)} + \cdots + p_{01} p_{12} p_{23} \cdots p_{n-2,n-1} p_{n-1,0}.$$

但是$(k \leqslant L)$

$$p_{01} p_{12} p_{23} \cdots p_{k-1,k} p_{k,0} = \frac{g_1}{g_0} \frac{g_2}{g_1} \frac{g_3}{g_2} \cdots \frac{g_k}{g_{k-1}} \frac{f_{k+1}}{g_k} = f_{k-1},$$

所以

$$p_{00}^{(n)} = f_1 p_{00}^{(n-1)} + f_2 p_{00}^{(n-2)} + \cdots + f_{n-1} p_{00} + f_n.$$

从而，如果 $u_k = p_{00}^{(k)}$，$0 \leqslant k \leqslant n-1$，则 $u_n = p_{00}^{(n)}$. #

由定义易见，更新序列由它的 $F$ 序列唯一决定，下面的定理

将这一说法用数学公式明确化.

**定理Ⅲ**

设 $u=(u_n,\ n\in\overline{N})\in\mathscr{R}$，它对应的 $F$ 序列是 $(f_n,\ n\in N)$，，则 $u_0=1$，而当 $n\geqslant 1$ 时

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1+\cdots+i_k=n}f_{i_1}\cdots f_{i_k}\tag{10}$$

其中足标 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 均为正整数.

**证**：用归纳法，显然 $u_1=f_1$. 假定(10) 对 $1,2,\cdots,n-1$ 都成立 $(n\geqslant 2)$，则

$$\begin{aligned}
u_n&=\sum_{r=1}^{n}f_r u_{n-r}\\
&=\sum_{r+s=n,\,1\leqslant r,s\leqslant n-1}f_r u_s+f_n\\
&=\sum_{r+s=n,\,1\leqslant r,s\leqslant n-1}f_r\sum_{l=1}^{s}\sum_{i_1+\cdots+i_l=s}f_{i_1}\cdots f_{i_l}+f_n\\
&=\sum_{r+s=n,\,1\leqslant r,s\leqslant n-1}\sum_{l=1}^{s}\sum_{i_1+\cdots+i_l+r=n}f_{i_1}\cdots f_{i_l}f_r+f_n\\
&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1+\cdots+i_k=n}f_{i_1}\cdots f_{i_k}.
\end{aligned}$$

上面式中所有足标均取正整数，从而(10)对所有 $n\geqslant 1$ 成立. #

下述定理给出(10)式的反演公式.

**定理Ⅳ**

设 $u=(u_n,n\in\overline{N})\in\mathscr{R}$，它对应的 $F$ 序列是 $(f_n,n\in N)$，则

(11) $$f_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{i_1+\cdots+i_k=n} u_{i_1}\cdots u_{i_k} \qquad n \in N.$$

其中足标 $i_1, \cdots, i_k$ 均取正整数.

**证**：与定理 Ⅱ 的证明相似. #

3. 半群性

设 $u=(u_n, n\in \overline{N})\in \mathscr{R}$，$v=(v_n, n\in \overline{N})\in \mathscr{R}$，我们定义 $u$ 与 $v$ 的一种乘法运算如下. 令

$$w_n = u_n v_n, \qquad n \in \overline{N}.$$

则 $w=(w_n, n\in \overline{N})$仍是一个非负数列，记作

(12) $$w = u \otimes v = (u_n v_n, n \in \overline{N}).$$

我们的首要问题是，$\mathscr{R}$ 在运算 $\otimes$ 之下是否封闭？如果回答是肯定的，则 $\mathscr{R}$ 在运算 $\otimes$ 之下构成一可交换的半群，这样就可以进一步弄清 $\mathscr{R}$ 的结构，从而获得一些更加重要的性质.

**定理 V**

设 $u=(u_n, n\in \overline{N})\in \mathscr{R}$，$v=(v_n, n\in \overline{N})\in \mathscr{R}$，则

$$w = u \otimes v \in \mathscr{R}.$$

**证**：由于 $u\in \mathscr{R}$，$v\in \mathscr{R}$，根据定理 I，存在有限或可列集 $S_1, S_2$ 及 $a\in S_1$，$b\in S_2$和 $S_1$与 $S_2$上的随机矩阵 $Q=(q_{ij}, i, j\in S_1)$与 $R=(r_{st}, s, t\in S_2)$使

$$u_n = q_{aa}^{(n)}, \qquad v_n = r_{bb}^{(n)}, \qquad n \in \overline{N}.$$

现令 $S=S_1\times S_2$和

$$p_{(i,s)(j,t)} = q_{ij} r_{st}, \qquad (i,s), (j,t) \in S_1 \times S_2.$$

则

$$P=(p_{(i,s)(j,t)},\ (i,s),(j,t)\in S_1\times S_2)$$

是随机矩阵,记作 $P=Q\otimes R$. 下面用归纳法证明 $P^n=Q^n\otimes R^n$($n=0$ 显然成立),设 $P^{n-1}=Q^{n-1}\otimes R^{n-1}$,则

$$\begin{aligned} p^{(n)}_{(i,s)(j,t)} &= \sum_{(k,l)\in S_1\times S_2} p^{(n-1)}_{(i,s)(k,l)}\, p_{(k,l)(j,t)} \\ &= \sum_{k\in S_1}\sum_{l\in S_2} q^{(n-1)}_{ik} r^{(n-1)}_{sl} q_{kj} r_{lt} \\ &= q^{(n)}_{ij} r^{(n)}_{st}, \quad (i,s),(j,t)\in S_1\times S_2, \qquad n\in N. \end{aligned}$$

因此,$P^n=Q^n\otimes R^n$, $n\in\overline{N}$. 特别有

$$w_n=u_n v_n=q^{(n)}_{aa} r^{(n)}_{bb}=p^{(n)}_{(a,b)(a,b)}, \qquad n\in\overline{N}.$$

从而 $w=(w_n,\ n\in\overline{N})\in\mathscr{R}$. #

## 4. 逐点收敛拓扑

考虑拓扑空间$[0,1]^{\overline{N}}$, 其中$[0,1]$赋通常拓扑. $x\in[0,1]^{\overline{N}}$,即表示 $x=(x_n,n\in\overline{N})$,且 $0\leqslant x_n\leqslant 1,n\in\overline{N}$. 显然 $\mathscr{R}\subset[0,1]^{\overline{N}}$.

**定理 Ⅵ**

*$\mathscr{R}$ 作为$[0,1]^{\overline{N}}$的子空间是紧距离空间,设 $u\in\mathscr{R}$ 且 $f$ 是它对应的 $F$ 序列,令*

$$(13) \qquad j_n(u)=u_n, \qquad \varphi_n(u)=f_n, \qquad n\in N.$$

*则 $j_n,\varphi_n(n\in\overline{N})$是 $\mathscr{R}$ 上的连续函数.*

**证**: 由吉洪诺夫定理,$[0,1]^{\overline{N}}$是紧空间,令

$$\rho(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x_n-y_n|}{2^{n+1}},x=(x_n,n\in\overline{N}),y=(y_n,n\in\overline{N}).$$

则 $\rho$ 是$[0,1]^{\overline{N}}$上的距离,于是 $\mathscr{R}$ 也是距离空间.

显然,固定 $n\in\overline{N}$ , $j_n(x)=x_n(x\in[0,1]^{\overline{N}})$是连续的,从而 $j_n$ 在 $\mathscr{R}$ 上的限制 $j_n(u)=u_n(u\in\mathscr{R})$也是连续的.

现在对 $n\in N$ 按下面的递推关系定义

(14) $$\varphi_n(x)=j_n(x)-\sum_{r=1}^{n-1}\varphi_r(x)j_{n-r},\qquad x\in[0,1]^{\overline{N}}.$$

则 $\varphi_n(n\in N)$是$[0,1]^{\overline{N}}\to[0,1]$的连续映象,将 $\varphi_n$ 限制到 $\mathscr{R}$ 上,由(8) 得

$$\varphi_n(u)=f_n.$$

从而 $j_n$, $\varphi_n(n\in N)$是 $\mathscr{R}$ 上连续函数.

下面证明 $\mathscr{R}$ 是$[0,1]^{\overline{N}}$的闭子集.令

(15) $$R=\{x\in[0,1]^{\overline{N}}:x_0=1,\varphi_n(x)\geqslant0,n\in N\}.$$

显然 $\mathscr{R}\subset R$, 往证 $\mathscr{R}=R$. 事实上, 设 $x\in R$ , 记 $\varphi_n(x)=g_n$,并对 $0<z<1$ 令

$$U(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x_nz^n.$$

由(14),并注意 $x_0=1$, $j_n(x)=x_n,\varphi_n(x)=g_n(n\in N)$ , 得

$$\begin{aligned}U(z)&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{r=1}^{n}g_rx_{n-r}\Big)z^n\\&=1+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}g_rx_mz^{m+r}\\&=1+U(z)\sum_{r=1}^{\infty}g_rz^r\\&\geqslant U(z)\sum_{r=1}^{\infty}g_rz^r.\end{aligned}$$

从而

$$\sum_{r=1}^{\infty} g_r z^r \leqslant 1 .$$

令 $z \uparrow 1$，得 $\sum\limits_{r=1}^{\infty} g_r \leqslant 1$ 于是 $x \in \mathscr{R}$ . 但由(15)，$R$ 是闭集，从而 $\mathscr{R} = R$ 是闭集. #

由上述定理的证明，我们不难得到下述推论.

**推论1**

设 $x \in [0,1]^N$，则 $x \in \mathscr{R}$ 的充要条件是存在非负数列 $f=(f_n, n \in N)$使

$$x_0 = 1 , \quad x_n = \sum_{r=1}^{n} f_r x_{n-r} , \qquad n \in N. \tag{16}$$ #

**推论2**

设 $x \in [0,1]^N$，则 $x \in \mathscr{R}$ 的充要条件是 $x_0 = 1$ 且对任意 $n \in N$ 有

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{i_1+\cdots+i_k=n} x_{i_1} \cdots x_{i_k} \geqslant 0 . \tag{17}$$

其中足标 $i_1, \cdots, i_k$ 取正整数.

证：令 $f_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum\limits_{i_1+\cdots+i_k=n} x_{i_1} \cdots x_{i_k} (n \in N)$ ，则 $(f_n, n \in N)$是非负数列，容易由(10)，(11)表达式的唯一性得出(16)成立. #

# §2 概率方法

## 5. 马氏链

我们假定读者熟悉概率论与测度论的基本常识.

给定基本概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, $S$ 是有限或可列集,定义在$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$上而取值于 $S$ 的随机变量序列 $X=(x_n, n\in \overline{N})$ 称为齐次马氏链(简称马氏链,本书不讨论非齐次马氏链),如果对任意 $j\in S, n\in N$ 有

(1) $$\mathbb{P}(x_n = j | X_0, X_1, \cdots, X_{n-1}) = \mathbb{P}(X_n = j | X_{n-1}),$$

而且对任意 $i, j\in S$,

(2) $$p_{ij} = \mathbb{P}(X_n = j | X_{n-1} = i),$$

不依赖于 $n\in N$ . 条件(2)也称为时齐性.

如果 $X=(X_n, n\in \overline{N})$ 是马氏链,由(2)有

$$p_{ij} \geqslant 0 \ (i, j \in S)\ ,\ \sum_{j\in S} p_{ij} = 1 \ (i \in S).$$

从而 $P=(p_{ij}, i, j\in S)$ 是随机矩阵. 这个随机矩阵称为马氏链 $X$ 的转移概率矩阵. 反之,任给随机矩阵 $P=(p_{ij}, i, j\in S)$ ,由著名的 Kolmogorov 定理,一定存在马氏链 $X=(X_n, n\in \overline{N})$ ,使 $P$ 是 $X$ 的转移概率矩阵.

在此意义下,马氏链的转移概率矩阵与随机矩阵是相同的概念.

然而,由于有了马氏链的概念,有关随机矩阵的许多分析性质,可以用概率论的述语简明地表述出来. 甚至用分析方法不容易得到的某些结果,用概率方法则很容易获得.

设 $X=(X_n,n\in\overline{N})$ 是马氏链，并假定 $X_0=a\in S$. 令

(3) $$\eta_0=0,$$

(4) $$\eta_1=\min(k>0,\ X_k=a).$$

一般地，对任意 $n\in N$，归纳地定义

(5) $$\eta_n=\min(k;\ \eta_{n-1}<k,\ X_k=a).$$

从而我们获得了随机变量序列

$$0=\eta_0<\eta_1<\cdots<\eta_n\cdots.$$

在假定 $X_0=a$ 之下，现记

(6) $$\mathbb{P}_a(A)=\mathbb{P}(A|X_0=a)$$

于是令

(7) $$\mathbb{P}_a^{(n)}=\mathbb{P}(X_n=a)=\mathbb{P}(X_n=a|X_0=a),\qquad n\in\overline{N}.$$

则当 $P(p_{ij},i,j\in S)$ 是 $X$ 的转移概率矩阵时，我们有

(8) $$\mathbb{P}_a^{(n)}=\sum_{i_1\in S}\cdots\sum_{i_{n-1}\in S}p_{ai_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}a}=p_{aa}^{(n)}.$$

然而$(p_{aa}^{(n)},n\in\overline{N})\in\mathscr{R}$，于是用马氏链的述语我们有结论：设 $X=(X_n,n\in\overline{N})$ 是马氏链，$X_0=a$，则

(9) $$(\mathbb{P}(X_n=a),\ n\in\overline{N})\in\mathscr{R}.$$

反之，任给 $u=(u_n,n\in\overline{N})\in\mathscr{R}$，则存在有限或可列集 $S$ 和 $a\in S$，以及 $S$ 上的马氏链 $X=(X_n,n\in\overline{N})$ 使

(10) $$u_n=\mathbb{P}(X_n=a),\qquad n\in\overline{N}.$$

现设 $X=(X_n,n\in\overline{N})$是马氏链，$X_0=a\in S$，又设 $P=(p_{ij},i,j\in S)$ 是 $X$ 的转移概率矩阵，记

(11) $$u_n=\mathbb{P}_a^{(n)}=\mathbb{P}(X_n=a)=p_{aa}^{(n)}.$$

设 $0<k_1<k_2<\cdots<k_n,k_i\in N(i=1,2,\cdots,n)$，则由马氏性

$$(12)\qquad \mathbb{P}(X_{k_1}=a,X_{k_2}=a,\cdots,X_{k_n}=a)$$
$$=\mathbb{P}_a^{(k_1)}\mathbb{P}_a^{(k_2-k_1)}\cdots\mathbb{P}_a^{(k_n-k_{n-1})}$$
$$=u_{k_1}u_{k_2-k_1}\cdots u_{k_n-k_{n-1}}.$$

又设 $\eta_i(i=0,1,\cdots)$ 如(3)～(5) 定义，并命

$$(13)\qquad f_n=\mathbb{P}_a(\eta_1=n)$$
$$=\mathbb{P}_a(X_1\neq a,\cdots,X_{n-1}\neq a,X_n=a),n\in N.$$

而当$0<k_1<\cdots<k_n$, $k_i\in N(i=1,\cdots,n)$时有

$$(14)\quad \mathbb{P}_a(\eta_1=k_1,\eta_2=k_2,\cdots,\eta_n=k_n)=f_{k_1},f_{k_2-k_1}\cdots f_{k_n-k_{n-1}}.$$

现在我们可以把§1的某些定理的表述和证明,给以明确的概率解释.

由马氏性，我们立即有

$$(15)\qquad u_n=\mathbb{P}_a(X_n=a)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}_a(\eta_1=k)\mathbb{P}_a(X_{n-k}=a)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}f_ku_{n-k},\qquad n\in N.$$

其次.

$$(16)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}f_n=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}_a(\eta_1=n)=\mathbb{P}_a(1\leqslant\eta<\infty)\leqslant 1.$$

(15),(16) 就相当于§1 中定理 I 的(7)和(6)式,从而我们就获得了定理 I 的简单的概率证明.

下述定理的前半部分只是定理V 的重复叙述,但用概率方法予以证明,后半部分则给出了两个更新序列在运算⊗之后所得到的新的更新序列对应的 $F$ 序列的明显表达式.

**定理Ⅶ**

设 $u=(u_n,n\in\overline{N})\in\mathscr{R}$, $v=(v_n,n\in\overline{N})\in\mathscr{R}$, 则

$$w = u \otimes v \in \mathscr{R} \tag{17}$$

其次，如果 $(g_n, n \in N)$，$(h_n, n \in N)$ 和 $(f_n, n \in N)$ 分别是 $u, v$ 和 $w$ 的 $F$ 序列，则

$$f_r = \sum_{l=1}^{r} \sum_{s=1}^{r} \sum_{\substack{n_1 + \cdots + n_l = m_1 + \cdots + m_s = r \\ n_1 + \cdots + n_k \neq m_1 + \cdots + m_q \\ (1 \leqslant k \leqslant l-1,\, 1 \leqslant q \leqslant s-1)}} g_{n_1} \cdots g_{n_l} h_{m_1} \cdots h_{m_s},\ r \in N. \tag{18}$$

其中所有下标 $n_i (1 \leqslant i \leqslant l)$，$m_j (1 \leqslant j \leqslant s)$ 都取正整数.

证：设 $X = (X_n, n \in \overline{N})$ 和 $Y = (Y_n, n \in \overline{N})$，是取值于 $S_1$ 和 $S_2$ 的两个独立的马氏链，$X_0 = a \in S_1$，$Y_0 = b \in S_2$，且 $u_n = \mathbb{P}(X_n = a)$，$v_n = \mathbb{P}(Y_n = b)$，令

$$S = S_1 \times S_2,\ Z_n = (X_n, Y_n), \qquad n \in \overline{N}.$$

则 $Z_0 = (a, b)$，且 $Z = (Z_n, n \in N)$ 是取值于 $S$ 的马氏链，且

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{(a,b)}^{(n)} &= \mathbb{P}(Z_n = (a, b)) = \mathbb{P}(X_n = a)\mathbb{P}(Y_n = b) \\ &= u_n v_n = w_n, \qquad n \in \overline{N}. \end{aligned}$$

从而 $w = (w_n, n \in \overline{N}) \in \mathscr{R}$，(17)式获证.

欲证(18)式，我们令

$$\eta_0 = \xi_0 = \lambda_0 = 0,$$

而对 $n \in N$，分别归纳地定义

$$\begin{aligned} \eta_n &= \min(k > \eta_{n-1},\ X_k = a), \\ \xi_n &= \min(k > \xi_{n-1},\ Y_k = b), \\ \lambda_n &= \min(k > \lambda_{n-1},\ Z_k = (a, b)). \end{aligned}$$

其次，为书写方便，令

$$A_{l,s}^{(r)} = (\eta_l = \xi_s = r, \eta_i \neq \xi_j, 1 \leqslant i \leqslant l-1, 1 \leqslant j \leqslant s-1)$$

$$B_l = (\eta_i = n_1 + \cdots + n_i, 1 \leqslant i \leqslant l)$$

$$C_s = (\xi_j = m_1 + \cdots + m_j, 1 \leqslant j \leqslant s)$$

则显然有

$$(19) \qquad f_r = \mathbb{P}_{(a,b)}(\lambda_1 = r) = \sum_{l=1}^{r} \sum_{s=1}^{r} \mathbb{P}_{(a,b)}(A_{l,s}^{(r)}), \qquad r \in N.$$

然而

$$(20) \qquad \mathbb{P}_{(a,b)}(A_{l,s}^{(r)}) = \sum_{\substack{n_1 + \cdots + n_l = m_1 + \cdots + m_s = r \\ n_1 + \cdots + n_k \neq m_1 + \cdots + m_q \\ (1 \leqslant k \leqslant l-1, 1 \leqslant q \leqslant s-1)}} \mathbb{P}_{(a,b)}(B_l \cap C_s).$$

由于 $X$ 与 $Y$ 是独立的，所以

$$(21) \qquad \mathbb{P}_{(a,b)}(B_l \cap C_s) = \mathbb{P}_a(B_l)\mathbb{P}_b(C_s) = g_{n_1} \cdots g_{n_l} h_{m_1} \cdots h_{m_s}.$$

最后一步用到(14)式，将(21)代入(20)再代入(19)就得(18)． #

## 6. 离散再生现象

还有第二种概率方法研究更新序列，这就是离散再生现象．

设 $Z = (Z_n, n \in \overline{N})$ 是随机变量序列，$Z_0 = 1$ 而对 $n \geqslant 1$，$Z_n$ 仅取 0 或 1，称 $Z$ 为离散再生现象如果存在数列 $\{u_n, n \in \overline{N}\}$ 满足 $u_0 = 1$，使得对任意符合条件

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$$

的整数列 $t_0, t_1, \cdots, t_n$ 均成立

$$(22) \qquad \mathbb{P}(Z_{t_1} = Z_{t_2} = \cdots = Z_{t_n} = 1) = \prod_{r=1}^{n} u_{t_r - t_{r-1}}.$$

下面的定理阐明了再生现象的“再生性”．

**定理 Ⅷ**

设 $Z=(Z_n,n\in\bar{N})$ 是离散再生现象，$t_1,\cdots,t_m$，$t_{m+1},\cdots,t_{m+n}$ 和 $T$ 是正整数，满足

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_m<T<t_{m+1}<\cdots<t_{m+n}$$

则

$$(23)\qquad E\Big(\prod_{k=1}^{m}Z_{t_k}Z_T\prod_{s=1}^{n}Z_{t_{m+s}}\Big)=E\Big(\prod_{k=1}^{m}Z_{t_k}Z_T\Big)E\Big(\prod_{s=1}^{n}Z_{t_{m+s}-T}\Big).$$

**证**：我们有

$$\begin{aligned}
&E\Big(\prod_{k=1}^{m}Z_{t_k}Z_T\prod_{s=1}^{n}Z_{t_{m+s}}\Big)\\
=&\mathbb{P}(Z_{t_1}=\cdots=Z_T=\cdots=Z_{t_{m+n}}=1)\\
=&\prod_{k=1}^{m}u_{t_k-t_{k-1}}u_{T-t_m}u_{t_{m+1}-T}\prod_{s=2}^{n}u_{t_{m+s}-t_{m+s-1}}\\
=&\prod_{k=1}^{m}u_{t_k-t_{k-1}}u_{T-t_m}u_{t_{m+1}-T}\prod_{s=2}^{n}u_{t_{m+s}-T-t_{m+s-1}+T}\\
=&E\Big(\prod_{k=1}^{m}Z_{t_k}Z_T\Big)E\Big(\prod_{s=1}^{n}Z_{t_{m+s}-T}\Big).
\end{aligned}$$

#

应用上述定理，我们可以得到下面很有用的公式，设 $Z=(Z_n;n\in\bar{N})$ 是再生现象，而

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_m<T<t_{m+1}<\cdots<t_{m+n}$$

其中 $T$ 与 $t_i(1\leqslant i\leqslant n+m)$ 均为正整数，则

$$(24)\quad \mathbb{P}(Z_{t_i}=a_i,\leqslant i\leqslant m,Z_T=1,Z_{t_{m+j}}=a_{m+j},1\leqslant j\leqslant n)$$

$$=\mathbb{P}(Z_{t_i}=a_i,\leqslant i\leqslant m,Z_T=1)\mathbb{P}(Z_{t_{m+j}-T}=a_{m+j},1\leqslant j\leqslant n).$$

其中 $a_i(1\leqslant i\leqslant n+m)$ 取 0 或 1.

下述定理建立了再生现象(离散)与更新序列以及马氏链之间的关系.

**定理 IX**

设 $Z=(Z_n,n\in\overline{N})$ 是离散再生现象,则(22)中的 $u=(u_n,n\in\overline{N})\in\mathscr{R}$, 反之如果 $u=(u_n,n\in\overline{N})\in\mathscr{R}$, 则存在离散再生现象 $Z=(Z_n,n\in\overline{N})$ 使(22)成立.

**证**:设 $(Z_n,n\in\overline{N})$ 是离散再生现象,令

(25)　$f_1=\mathbb{P}(Z_1=1)$,

$$f_n=\mathbb{P}(Z_1=\cdots=Z_{n-1}=0,Z_n=1)\ ,\quad n\geqslant 2,n\in N.$$

则 $f_n\geqslant 0$ $(n\in N)$ 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n=\mathbb{P}(Z_n=1,\text{存在 } n\in N)\leqslant 1.$$

但是当 $n\geqslant 2$ 时

(26)
$$f_n=E((1-Z_1)\cdots(1-Z_{n-1})Z_n).$$

又因 $Z_n$ 只取 0 或 1 ,易证

$$Z_n=Z_1Z_n+\sum_{k=2}^{n}(1-Z_1)\cdots(1-Z_{k-1})Z_kZ_n,\qquad n\geqslant 2\ .$$

从而由(22),(25)得

$$\begin{aligned}u_n&=\mathbb{P}(Z_n=1)\\&=E(Z_1Z_n)+\sum_{k=2}^{n}[(1-Z_1)\cdots(1-Z_{k-1})Z_kZ_n]\\&=f_1u_{n-1}+\sum_{k=2}^{n-1}\mathbb{P}(Z_1=\cdots=Z_{k-1}=0,Z_k=Z_n=1)+f_n\end{aligned}$$

$$=\sum_{k=1}^{n} f_k u_{n-k}.$$

从而 $u=(u_n, n\in\overline{N})\in\mathscr{R}$.

反之，如果 $u=(u_n, n\in\overline{N})\in\mathscr{R}$，则存在有限或可列集 $S$ 上的马氏链 $X=(X_n, n\in\overline{N})$，$X_0=a\in S$ 且

$$u_n = p_{aa}^{(n)} = \mathbb{P}_a(X_n = a).$$

现在定义 $S$ 上的函数 $\varphi$：

$$\varphi(a) = 1\ ,\ \varphi(b) = 0\ ,\qquad b\in S\setminus\{a\}\ .$$

并令

$$Z_n = \varphi(X_n)\ ,\qquad n\in\overline{N}.$$

则 $Z=(Z_n, n\in\overline{N})$ 是随机变量序列，只取值 0 或 1．当 $t_1,\cdots,t_n$ 是整数，且 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n$ 时有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Z_{t_1} = Z_{t_2} = \cdots = Z_{t_n} = 1)\\
&= \mathbb{P}(X_{t_1} = X_{t_2} = \cdots = X_{t_n} = a)\\
&= \prod_{k=1}^{n} p_{aa}^{(t_k - t_{k-1})}\\
&= \prod_{k=1}^{n} u_{t_k - t_{k-1}}.
\end{aligned}$$

从而 $Z=(Z_n, n\in\overline{N})$ 是离散再生现象.　　　#

## §3　Kingman 不等式

### 7. 二阶 Kingman 不等式

二阶 Kingman 不等式是研究更新序列的有力工具，它的形式简明，应用广泛.

**定理** X

设 $u=(u_n,n\in\overline{N})\in\mathscr{R}$ ．则

(1)　　$$u_m u_n \leqslant u_{m+n} \leqslant u_m u_n + 1 - u_m,\qquad n,m\in\overline{N}.$$

**证**：选取 $S$ 上的随机矩阵 $P=(p_{ij},i,j\in S)$，使得有 $a\in S$ ，$u_n=p_{aa}^{(n)}$，$n\in\overline{N}$，则

$$\begin{aligned} u_m - u_n u_m &= \sum_{k\in S} p_{ak}^{(m)} p_{ka}^{(n)} - p_{aa}^{(n)} p_{aa}^{(m)} \\ &= \sum_{k\in S\setminus\{a\}} p_{ak}^{(m)} p_{ka}^{(n)} \\ &\leqslant \sum_{k\in S\setminus\{a\}} p_{ak}^{(m)} = 1 - u_m. \end{aligned}$$ #

## 8．一般 Kingman 不等式

设 $u=(u_n,n\in\overline{N})$ 是实数序列，对任意满足

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_n,\qquad n\geqslant 1$$

的整数列 $t_1,\cdots,t_n$，令

(2)　　$$\begin{aligned} F(t_1,\cdots,t_n;u) &= u_{t_n} - \sum_{1\leqslant i<n} u_{t_i} u_{t_n-t_i} \\ &\quad + \sum_{1\leqslant i<j<n} u_{t_i} u_{t_j-t_i} u_{t_n-t_j} \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n-1} u_{t_1} u_{t_2-t_1} \cdots u_{t_n-t_{n-1}}. \end{aligned}$$

**定理** XI

实数列 $u=(u_n,n\in\overline{N})\in\mathscr{R}$ 的充要条件是：$u_0=1$ 且对任意 $n\geqslant 1$ 及任意符合条件

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_n$$

的整数列 $t_1,\cdots,t_n$，均成立

$$(3)\qquad F(t_1,\cdots t_n;u)\geqslant 0,\quad \sum_{k=1}^{n}F(t_1,\cdots,t_k;u)\leqslant 1.$$

证：假定 $u=(u_n,n\in\overline{N})\in\mathscr{R}$．则由定理Ⅸ，存在离散再生现象 $Z=(Z_n,n\in\overline{N})$，使得满足条件

$$(4)\qquad 0=t_0<t_1<\cdots<t_n,$$

的任意整数列 $t_1,\cdots,t_n$，均有

$$\mathbb{P}(Z_{t_1}=Z_{t_2}=\cdots=Z_{t_n}=1)=\prod_{i=1}^{n}u_{t_i-t_{i-1}}.$$

设整数列 $t_1,\cdots,t_n$ 满足(4) 而 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 0 或 1，令

$$(5)\qquad \varphi(t_1,\cdots,t_n;\ \alpha_1,\cdots,\alpha_n;u)=\mathbb{P}(Z_{t_i}=\alpha_i,\ 1\leqslant i\leqslant n).$$

在(5)中取 $\alpha_1=\cdots=\alpha_{n-1}=0,\alpha_n=1$，则得

$$\begin{aligned}
&\varphi(t_1,\cdots,t_{n-1},t_n;0,\cdots,0,1;u)\\
&=\mathbb{P}(Z_{t_i}=0,1\leqslant i\leqslant n-1,Z_{t_n}=1)\\
&=\mathbb{P}(Z_{t_n}=1)-\sum_{1\leqslant i<n}\mathbb{P}(Z_{t_i}=Z_{t_n}=1)\\
&\quad+\sum_{1\leqslant i<j<n}\mathbb{P}(Z_{t_i}=Z_{t_j}=Z_{t_n}=1)-\cdots\\
&\quad+(-1)^{n-1}\mathbb{P}(Z_{t_1}=\cdots=Z_{t_n}=1)\\
&=F(t_1,\cdots,t_n;u)\geqslant 0.
\end{aligned}$$

由此，我们又得

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}F(t_1,\cdots,t_k;u)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\Phi(t_1,\cdots,t_{k-1},t_k;0,\cdots,0,1;u)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Z_{t_1} = \cdots = Z_{t_{k-1}} = 0, Z_{t_k} = 1)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(Z_{t_1} = \cdots = Z_{t_n} = 0) \leqslant 1 .$$

反之，如果 $u=(u_n, n\in \overline{N})$满足 $u_0=1$ 及条件(3)，我们需要构造随机过程 $Z=(Z_n, n\in \overline{N})$，满足条件 $Z_0=1$、$Z_n(n\geqslant 1)$ 只取 0 或 1，而对于满足(4) 的整数 $t_1,\cdots,t_n$ 有

(6) $$\mathbb{P}(Z_{t_1} = \cdots = Z_{t_n} = 1) = \prod_{i=1}^{n} u_{t_i - t_{i-1}}.$$

为此，我们必须应用 Kolmogorov 测度扩张定理. 首先，对满足(4)的 $t_1,\cdots,t_n$ 及 $\alpha_1=\cdots=\alpha_{n-1}=0$，$\alpha_n=1$ 令

(7) $$\varphi(t_1,\cdots,t_{n-1},t_n;0,\cdots,0,1;u) = F(t_1,\cdots,t_n;u),$$

而当 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$ 时，令

(8) $$\varphi(t_1,\cdots,t_n;0,\cdots,0,0;u) = 1 - \sum_{k=1}^{n} F(t_1,\cdots,t_k;u).$$

其次，当 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 中恰有 $k$ 个为 $1(1\leqslant k\leqslant n)$，而其余 $n-k$ 个为 0 时，即当

$$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$$

时，$\alpha_{i_j}=1(1\leqslant j\leqslant k)$，$\alpha_h=0(h\neq i_j,\ 1\leqslant j\leqslant k,\ 1\leqslant h\leqslant n)$，则令

(9) $$\varphi(t_1,\cdots,t_n;\alpha_1,\cdots,\alpha_n;u)$$

$$= \prod_{m=1}^{k} F(t_{i_{m-1}+1} - t_{i_{m-1}},\cdots,t_{i_m} - t_{i_{m-1}};u)$$

$$\times \left(1 - \sum_{l=1}^{n-i_k} F(t_{i_k+1} - t_{i_k},\cdots,t_{i_k+l} - t_{i_k},u)\right).$$

由(7),(8),(9)，我们对满足(4)的 $t_1,\cdots,t_n$ 及只取 0,1 值的 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 都定义了

$$\varphi(t_1,\cdots,t_n;\alpha_1,\cdots,\alpha_n;u).$$

由(3)，容易证明(7)，(8)，(9)的定义是相容的，从而由 Kolmogorov定理，存在$\{0,1\}^N$上的概率测度 $\mathbb{P}$ 使(6)成立．　#

## 9. 简单应用

设 $u=(u_n, n\in \bar{N})\in \mathscr{R}$，如果

(10)　$$u_n>0,\qquad n\in N,$$

则称 $u$ 是正更新序列．

假定 $u$ 是正更新序列，并且存在 $n_0\in N$，$m_0\in N$ 使

(11)　$$u_{n_0+m_0}=u_{n_0}u_{m_0}$$

则存在 $\rho$，$0<\rho\leqslant 1$ 使

(12)　$$u_n=\rho^n,\ 0\leqslant n\leqslant n_0+m_0$$

我们现在来证明上述结论．

由三阶 Kingman 不等式

$$u_{n_0+m_0}-u_{n_0}u_{m_0}\geqslant u_r(u_{n_0+m_0-r}-u_{n_0}u_{m_0-r}),\ r\in \bar{N},\ 0\leqslant r\leqslant m_0.$$

由(1)(10)和(11)得 $u_{n_0+m_0-r}=u_{n_0}u_{m_0-r}$ $(0\leqslant r\leqslant m_0)$．同理有 $u_{n_0+m_0-r}=u_{m_0}u_{n_0-r}$，$(0\leqslant r\leqslant n_0)$，于是当 $0\leqslant r\leqslant \min(n_0,m_0)$ 时有 $u_{n_0+m_0-r}=u_{n_0}u_{m_0-r}=u_{m_0+n_0-r}$．因此

(13)　$$u_{n_0+s}=u_{n_0}u_s,\quad u_{m_0+s}=u_{m_0}u_s,\quad 0\leqslant s\leqslant \min(n_0,m_0).$$

固定 $0<s\leqslant \min(n_0,m_0)$，以(13)替代(11)重复上述讨论就得

(14)　$$u_{r+s}=u_ru_s,\qquad 0\leqslant r,s\leqslant \min(n_0,m_0).$$

如果 $n_0=m_0$，则由(13)，(14)已得

(15)　$$u_{r+s}=u_ru_s,\qquad 0\leqslant r+s\leqslant n_0+m_0,\ r\geqslant 0,\ s\geqslant 0.$$

如果 $n_0\neq m_0$，不妨设 $m_0=kn_0+h$ $(0\leqslant h<n_0$ 且 $k\geqslant 1)$．从而有 $m_0+n_0=(k+1)n_0+h$．现设非负整数 $r,s$ 满足条件

(16)　$$0\leqslant r+s\leqslant m_0+n_0,$$

$$r = jn_0 + r_1,\ 0 \leqslant r_1 \leqslant n_0,\ 0 \leqslant j \leqslant k+1.$$

则逐步应用(13)与(14)

(17) $$u_{r+s} = u_{n_0} u_{r+s-n_0} = \cdots = u_{n_0}^j u_{r_1} u_s = \cdots = u_r u_s.$$

从而我们得

$$u_{r+s} = u_r u_s, \qquad 0 \leqslant r+s \leqslant m_0 + n_0,\ r \geqslant 0,\ s \geqslant 0.$$

于是存在 $\rho$, $0<\rho\leqslant 1$ 使(12)成立. #

## §4 无穷可分性

10. 例

固定 $m \in N$，$0<p<1$ 令

(1) $$u_n = p^{\min(n,m)}, \qquad n \in \overline{N}.$$

我们下面证明，由(1)确定的 $u=(u_n, n\in\overline{N})$ 是更新序列.

设 $S=(0,1,\cdots,m)$. 定义 $S$ 上的马氏链，它的转移概率矩阵 $P=(p_{ij}, i,j\in S)$ 定义为：

$$p_{00} = p_{k,k-1} = p, \qquad k = 1,2,\cdots,m;$$

$$p_{km} = 1-p, \qquad k = 0,1,\cdots,m;$$

$$p_{ij} = 0, \qquad \text{其余 } i,j \in S$$

这个马氏链可以用如下的概率术语描述，假定掷铜币，每次出现正面的概率是 $p$，而反面的概率是 $1-p$，令 $X_0=0$，对于 $n\in N$，我们观察 $n+1, n+2, \cdots, n+m$ 次掷铜币的结果，如果存在 $k\in N$，$1\leqslant k\leqslant m$，使得第 $n+k$ 次出现的是反面，而 $n+k+1,\cdots,n+m$ 次都出现正面. 则令 $X_n=k$，如果不存在这样的 $k$，即第 $n+1$ 至 $n+m$ 次均为正面，则令 $X_n=0$，于是显然有

$p_{00}^{(n)} = \mathbb{P}$(第 $n+1$ 至第 $n+m$ 次为正面 | 第 1 至第 $m$ 次为正面)

$= p^{\min(n,m)}, \qquad n \in \overline{N}$ ,

因此 $v=(u_n=p^{\min(n,m)},\ n\in N)\in\mathscr{R}$.

## 11. Kaluza 序列

序列$(u_n, n\in N)$如果满足条件

(2)　　$0 < u_n \leqslant 1 = u_0,\ u_n^2 \leqslant u_{n-1}u_{n+1}, \qquad n \in N,$

则称 $(u_n, n\in N)$为 Kaluza 序列.

我们证明,任意 Kaluza 序列是更新序列.

为此,令

$$v_n = u_{n-1}/u_n, \qquad n \in \overline{N}.$$

则 $(v_n,\ n\in \overline{N})$ 是不减序列, 从而 $v_n \to v$(当 $n\to\infty$) 我们证明 $0<v\leqslant 1$ 事实上,如果 $v>1$, 则存在 $\varepsilon>0$ 及 $n_0\in N$ ,使当 $n\geqslant n_0$时, $v_n\geqslant 1+\varepsilon$. 于是

$$\frac{u_{n_0+k}}{u_{n_0}} = \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \cdots \frac{u_{n_0+k}}{u_{n_0+k-1}} = v_{n_0}\cdots v_{n_0+k} \geqslant (1+\varepsilon)^k, \qquad k \in N.$$

从而

$$u_{n_0+k} \geqslant (1+\varepsilon)^k u_{n_0}, \qquad k \in N.$$

由于 $u_{n_0}>0$, 从而当 $k\to\infty$ 时 $u_{n_0+k}\to\infty$ , 此与 $u_n\leqslant 1$矛盾, 从而 $0<v\leqslant 1$.

现令

$$p_n = v_{n-1}/v_n, \qquad n \in N.$$

于是 $0<p_n\leqslant 1$ 且

$$v_n = v\prod_{k=n+1}^{\infty} p_k, \qquad n \in N.$$

从而

(3)
$$u_n = \prod_{j=0}^{n-1} r_j = \prod_{j=0}^{n-1}\left(r\prod_{k=j+1}^{\infty} p_k\right)$$
$$= r^n \prod_{k=1}^{\infty} p_k^{\min(n,k)}, \qquad n \in \overline{N}.$$

现对 $l \in N$，令
$$u_n^{(l)} = r^n \prod_{k=1}^{l} p_k^{\min(n,k)}$$

则因 $(r^n, n \in \overline{N}) \in \mathscr{R}$，$(p_k^{\min(n,k)}, n \in \overline{N}) \in \mathscr{R}$，由半群性知，$(u_n^{(l)}, n \in \overline{N}) \in \mathscr{R}$ 又因
$$\lim_{l\to\infty} u_n^{(l)} = u_n, \qquad n \in \overline{N}.$$
从而由定理Ⅵ，$u = (u_n, n \in \overline{N}) \in \mathscr{R}$.　　#

## 12. 无穷可分性

设 $u = (u_n, n \in \overline{N}) \in \mathscr{R}$．如果对于任意非负实数 $h$，仍有
$$u^{(h)} = (u_n^h, n \in \overline{N}) \in \mathscr{R},$$
则称 $u$ 是无穷可分的．

**定理**Ⅻ

设 $u = (u_n, n \in \overline{N}) \in \mathscr{R}$ 且 $u_n > 0$，$n \in \overline{N}$．则 $u$ 是无穷可分的当且仅当 $u$ 是 Kaluza 序列．

**证**：充分性，如果 $u$ 是 Kaluza 序列，则对任意 $h > 0$ 有
$$0 < u_n^h \leqslant 1 = u_0^h,\ u_n^{2h} \leqslant u_{n-1}^h u_{n+1}^h, \qquad n \in N.$$
从而 $u^{(h)} = (u_n^h, n \in \overline{N})$ 仍是 Kaluza 序列，故 $u^{(h)} \in \mathscr{R}$，即 $u$ 是无穷可分的．

必要性．现设 $u=(u_n, n\in \overline{N})$是无穷可分的且 $u_n>0$，$n\in N$．于是对任意 $h>0$，$u^{(h)}=(u_n^h, n\in N)\in \mathscr{R}$．

现以$(f_n(h), n\in N)$记 $u^{(h)}$对应的 $F$ 序列，由于 $u_n>0$，故可令

$$u_n = e^{-x_n}, \qquad n\in \overline{N}.$$

则

$$f_n(h) = u_n^h - \sum_{k=1}^{n-1} f_k(h) u_{n-k}^h$$

$$= e^{-x_n h} - \sum_{k=1}^{n-1} f_k(h) e^{-hx_{n-k}}, \qquad n\in N.$$

从而 $f_n(h)(n\in N)$ 都是 $h$ 的连续可微函数，而且显然有

$$\lim_{h\to 0} f_1(h) = 1, \lim_{h\to 0} f_k(h) = 0, \qquad k\geqslant 2.$$

其次，我们有

$$\lim_{h\to 0} f_1'(h) = \lim_{h\to 0} (e^{-x_1 h})' = -x_1,$$

$$\lim_{h\to 0} f_2'(h) = \lim_{h\to 0} (e^{-x_2 h} - e^{-2x_1 h})' = -x_2 + 2x_1,$$

$$\lim_{h\to 0} f_3'(h) = -x_3 + 2x_2 - x_1.$$

而对 $n\geqslant 3$，容易归纳地算出

$$\lim_{h\to 0} f_n'(h) = -x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2}, \qquad n\geqslant 3.$$

由于 $f_n(h)\geqslant 0$，而 $f_n(0)=0$ $(n\geqslant 2)$，从而当 $n\geqslant 2$ 时，$f_n'(0)\geqslant 0$，故

$$2x_{n-1}\geqslant x_n + x_{n-2}, \qquad n\geqslant 2,$$

从而

$$u_{n-1}^2 = e^{-2x_{n-1}} \leqslant e^{-(x_n + x_{n-2})} = u_n u_{n-2}, \qquad n\geqslant 2. \qquad \#$$

# §5　遍历理论

## 13. 周期性

本节内容，通常可从马氏链有关的书藉中找到.

**定理** XII

设 $u=(u_n, n\in N)\in\mathscr{R}$，但 $u\neq(1,0,\cdots)$. 则存在唯一的 $d\in N$，使

A. $d\nmid n$ 时，$u_n=0$，$n\in N$. 记号 $d\nmid n$ 表示 $n$ 不是 $d$ 的倍数.

B. 除了有限个 $r\in N$ 以外，$u_{rd}>0$.

C. 下述极限存在

$$(1)\qquad \rho=\lim_{r\to\infty}(u_{rd})^{1/rd},\qquad 0<\rho\leqslant 1.$$

D. $\tilde{u}=(u_n\rho^{-n}, n\in\overline{N})\in\mathscr{R}$.

**证**：对任意 $n\in N$，令

$$(2)\qquad \rho_n=\lim_{r\to\infty}\inf(u_{rn})^{1/rn}.$$

并令

$$(3)\qquad d=\min(n:\rho_n>0).$$

我们首先证明 $d<\infty$，因为 $u\neq(1,0,\ldots)$，所以存在 $m<\infty$，有 $u_m>0$.

由 Kingman 不等式

$$u_{rm}\geqslant u_m^r,\qquad r\in N.$$

此即

$$u_{rm}^{1/rm} \geqslant u_m^{1/m} > 0, \qquad r \in N.$$

从而

$$\rho_m = \lim_{r\to\infty} \inf (u_{rm})^{1/rm} \geqslant u_m^{1/m} > 0.$$

于是由(3)所定义的 $d<\infty$. 下面证明这个 $d$ 满足定理中的A～D.

为此，我们预先证明如下结果：设 $m,n\in N,(m,n)=k$，$u_m>0$，则必有

$$u_n \leqslant \rho_k^n. \tag{4}$$

由数论的一个简单结果知，存在正整数 $a$ 及 $b$，使 $am-bn=k$. 对任意 $r\in N$，令

$$h = h(r) = \left[\frac{ar}{n}\right].$$

是 $\frac{ar}{n}$ 的整数部分．于是当 $kr\geqslant mn$ 时，

$$h > \frac{ar}{n} - 1 = \frac{(bn+k)r}{mn} - 1 = \frac{br}{m} + \left(\frac{kr}{mn} - 1\right) \geqslant \frac{br}{m}. \tag{5}$$

但是

$$rk = arm - brd = (ar-hn)m + (hm-br)n \tag{6}$$

应用 Kingman 不等式立得

$$u_{rk} \geqslant u_m^{ar-hn} u_n^{hm-br}. \tag{7}$$

从而

$$u_{rk}^{1/rk} \geqslant u_m^{(ar-hn)/rk} u_n^{(hm-br)/rk}. \tag{8}$$

现在注意

$$ar - hn = ar - \frac{ar}{n}n + \left\{\frac{ar}{n}\right\}n \leqslant n.$$

其中 $\left\{\frac{ar}{n}\right\}$ 是 $\frac{ar}{n}$ 的分数部分，故

$$\lim_{r\to\infty} \frac{ar-hn}{rk} = 0. \tag{9}$$

其次，由

$$hm - br = \frac{arm}{n} - br - \left\{\frac{ar}{n}\right\}m - \frac{rk}{n} - \left\{\frac{ar}{n}\right\}m$$

得

(10) $$\lim_{r\to\infty}\frac{hm - br}{rk} = \frac{1}{n}.$$

将(9)，(10)代入(8)，并注意 $u_m>0$，令 $r\to\infty$ 得

$$\rho_k = \lim_{r\to\infty}\inf u_{rk}^{1/rk} \geqslant u_n^{1/n}$$

从而证明了(4).

现证由(3)定义的 $d$ 满足定理中的 A～D，B 是显然的，由(2)，(3) 立即得到. 现证 A，假定 A 不成立，则存在 $m\in N$，使 $u_m>0$ 且 $(m,d)=k<d$. 由(3)知 $\rho_k=0$. 现在设 $p$ 是素数且 $p>m$，则 $(m,pd)=k$，于是由(4)，$u_{pd}=0$，因为大于 $m$ 的素数是无穷的，故 $\rho_d=0$，此与(3)矛盾. 由此矛盾证明了 A.

现证 C，对任意 $r\in N$，总存在 $s\in N$ 使 $(r,s)=1$ 且 $u_{sd}>0$，于是，在(4)的证明中取 $n=rd, m=sd$ 得 $u_{rd}\leqslant\rho_d^{rd}$. 因此

(11) $$\lim_{r\to\infty}\sup u_{rd}^{1/rd} \leqslant \rho_d = \lim_{r\to\infty}\inf u_{rd}^{1/rd}$$

从而由(2)和(11)得

$$\rho_d = \lim_{r\to\infty} u_{rd}^{1/rd}.$$

这就证明了 C.

最后证明 D，由上面的证明易知

$$u_{rd} \leqslant \rho_d^{rd}, \qquad r\in N.$$

从而 $\bar u_n = u_n\rho_d^{-n}\leqslant 1$ $(n\in N)$. 显然 $\bar u_0 = 1$ 且

$$\bar u_n = \rho_d^{-n}\sum_{k=1}^{n} f_k u_{n-k} = \sum_{k=1}^{n}\bar f_k \bar u_{n-k}, \qquad n\in N.$$

其中 $\bar f_k = f_k\rho_d^{-k}$ $(k\in N)$，故 $\bar u\in\mathscr{R}$. #

上述定理中的 $d$ 称为 $u=(u_n,n\in N)$的周期. 如果 $d=1$, 则称 $u$ 是非周期的.

假设 $u=(u_n,n\in N)\in\mathscr{R}$,它对应的 $F$ 序列是 $f=(f_n,n\in N)$. 并记 $L=(k:f_k>0)$. 则整数集合 $L$ 的最大公约数就是 $u$ 的周期 $d$, 读者不难用公式 $u_n=\sum_{k=1}^{n}f_ku_{n-k}(n\in N)$ 证明这一点.

## 14. 遍历定理

设 $u=(u_n,n\in\overline{N})\in\mathscr{R}$,其对应的 $F$ 序列是 $f=(f_n,n\in N)$. 令

$$f_\infty=1-\sum_{n=1}^{\infty}f_n,\qquad m=\sum_{n=1}^{\infty}nf_n \tag{12}$$

则 $f_\infty\geqslant 0$, $0\leqslant m\leqslant\infty$.

**定理 XIV**

设 $(u_n,n\in\overline{N})\in\mathscr{R}$, 则 $f_\infty>0$ 当且仅当 $\sum_{n\in\overline{N}}u_n$ 收敛. 且当 $f_\infty>0$ 时

$$\sum_{n\in N}u_n=1/f_\infty. \tag{13}$$

**证:** 设 $0<z<1$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}u_nz^n\sum_{k=1}^{\infty}f_kz^k+1$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_nz^n=1/\left(1-\sum_{k=1}^{\infty}f_kz^k\right)$$

令 $z\uparrow 1$, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n=1/\left(1-\sum_{k=1}^{\infty}f_k\right)=1/f_\infty.$$

上式中如果 $f_\infty=0$，约定 $1/0=\infty$. #

**定理** XV

设 $u=(u_n,n\in\overline{N})\in\mathscr{R}$，同期为 $d$，则

$$u_\infty=\lim_{n\to\infty}u_{nd}$$

存在，若 $f_\infty>0$，则 $u_\infty=0$，若 $f_\infty=0$，则

(14) $$u_\infty=d/m.$$

**证**：不失一般性，令 $d=1$．由定理XIV，我们只须证明 $f_\infty=0$ 的情形．记

$$r_n=\sum_{j=n+1}^{\infty}f_j.$$

则由 $f_\infty=0$，$r_0=1$．而

(15) $$\sum_{n=0}^{\infty}r_n=\sum_{n=1}^{\infty}nf_n=m.$$

现将 $-f_j=r_j-r_{j-1}$ 代入下式

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}f_ku_{n-k},$$

并注意 $r_0=1$ 得

$$\sum_{j=0}^{n}r_ju_{n-j}=\sum_{j=1}^{n}r_{j-1}u_{n-j}=\sum_{j=0}^{n-1}r_ju_{(n-1)-j},\qquad n\in N.$$

但是 $r_0u_0=1$，故

(16) $$\sum_{j=0}^{n}r_ju_{n-j}=r_0u_0=1,\qquad n\in\overline{N}.$$

现令

(17) $$\lambda=\lim_{n\to\infty}\sup u_n.$$

于是存在子列 $\{u_{n_k}\}$ 使 $\lambda=\lim_{k\to\infty}u_{n_k}$.

现设 $f_s>0$（对某 $s\in N$）. 任给 $\varepsilon>0$，取充分大的整数 $M>s$，使当 $n\geqslant M$ 时 $u_n<\lambda+\varepsilon$ 且 $\sum_{j=M+1}^{\infty} f_j<\varepsilon$. 于是当 $n_k\geqslant 2M$ 时

$$
\begin{aligned}
u_{n_k} &= \sum_{j=1}^{n_k} f_j u_{n_k-j} \\
&= f_s u_{n_k-s} + \sum_{j=1,j\neq s}^{n_k} f_j u_{n_k-j} \\
&= f_s u_{n_k-s} + \sum_{j=1,j\neq s}^{M} f_j u_{n_k-j} + \sum_{j=M+1}^{n_k} f_j u_{n_k-j} \\
&\leqslant f_s u_{n_k-s} + (1-f_s)(\lambda+\varepsilon)+\varepsilon.
\end{aligned}
$$

在上式中先令 $k\to\infty$，再令 $\varepsilon\to 0$ 就得

$$\lambda \leqslant f_s \liminf_{k\to\infty} u_{n_k-s} + (1-f_s)\lambda. \tag{18}$$

因为 $f_s>0$，由(18)得

$$\liminf_{k\to\infty} u_{n_k-s} \geqslant \lambda. \tag{19}$$

但由 $\lambda$ 的定义(17)，必有

$$\limsup_{k\to\infty} u_{n_k-s} \leqslant \limsup_{k\to\infty} u_{n_k} = \lambda. \tag{20}$$

由(19),(20)知，只要 $f_s>0$，就有

$$\lim_{k\to\infty} u_{n_k-s} = \lambda. \tag{21}$$

现设 $f_{s_1}>0,\cdots,f_{s_m}>0$，以及正整数 $c_1,\cdots,c_m$ 并命 $s=\sum_{i=1}^{m} c_i s_i$，则对 $s$ 重复上述步骤，就有

$$\lim_{k\to\infty} u_{n_k-s} = \lambda. \tag{22}$$

由于 $u$ 是非周期的，于是整数集 $L=(n: f_n>0)$ 的最大公约数是 1，从而按照数论的一个基本定理，存在 $s_1,\cdots,s_m\in L$，使 $s_1,\cdots,s_m$ 的最大公约数是 1，而且存在 $s_0\in N$，使当 $s\geqslant s_0$ 时，总有

正整数 $c_1,\cdots c_m$ 使 $s=\sum_{i=1}^{m}c_i s_i$. 于是当 $s\geqslant s_0$时，(22) 成立.

现在假定 $m<\infty$ . 任给 $\varepsilon>0$ ,取 $M$ , $\sum_{j=M+1}^{\infty}r_j<\varepsilon$. 再取 $k_0$, 使当 $k\geqslant k_0$ 时，$n_k-s_0>M$ 且

(23) $$|u_{n_k-(s_0+j)}-\lambda|<\varepsilon,\qquad 0\leqslant j\leqslant M$$

于是由(16),(15)及(23)得

$$\begin{aligned}|1-\lambda m| &= |\sum_{j=0}^{n_k-s_0}r_j u_{n_k-s_0-j}-\lambda\sum_{j=0}^{\infty}r_j|\\ &\leqslant|\sum_{j=0}^{M}r_j u_{n_k-s_0-j}-\lambda\sum_{j=0}^{M}r_j|+\sum_{j=M+1}^{n_k-s_0}r_j+\lambda\sum_{j=M+1}^{\infty}r_j\\ &\leqslant\sum_{j=0}^{M}r_j|u_{n_k-(s_0+j)}-\lambda|+(1+\lambda)\varepsilon\\ &\leqslant m\varepsilon+(1+\lambda)\varepsilon.\end{aligned}$$

由于 $\varepsilon$ 是任意正数，从而

$$\lambda=1/m.$$

如果 $m=\infty$ ，则对任意固定的正整数 $M$ ，当 $n_k-s_0>M$ 时

$$1\geqslant\sum_{j=0}^{M}r_j u_{n_k-s_0-j}.$$

令 $k\to\infty$得

$$1\geqslant\sum_{j=0}^{M}r_j\lambda.$$

从而再令 $M\to\infty$ ,得 $\lambda=0$, 即也有 $\lambda=1/m$.

最后，重复上述证明,但是适当改变有关不等式的方向,我们亦可以证明

$$\lim_{n\to\infty}\inf u_n=1/m. \qquad \#$$

## 15. Bloomfield 不等式

设 $u=(u_n, n\in N)\in\mathscr{R}$，则由二阶 Kingman 不等式有

(24) $$u_m u_n \leqslant u_{m+n} \leqslant u_m u_n + 1 - u_m, \qquad m, n \in \overline{N}.$$

如果 $u$ 是非周期的，则由定理 XV，$u_\infty=\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 存在，这时，在(24)中令 $m\to\infty$ 得

(25) $$u_n \geqslant 2 - u_\infty^{-1}, \qquad n \in \overline{N}$$

上式仅仅给出 $u_\infty>1/2$ 时，$u_n(n\in N)$的一个估计，下面的定理是更为精确的。

**定理** XVI

设 $u=(u_n, n\in\overline{N})\in\mathscr{R}$ 且 $u_1>0$，则

(26) $$u_n \geqslant \exp\left(\frac{u_\infty^{-1}-1}{1-u_1}\log u_1\right), \qquad n \in N.$$

**证**：令

$$h_n = \min(u_1, \cdots, u_n).$$

设 $u$ 对应的 $F$ 序列是$(f_n, n\in N)$，则当 $n\geqslant 2$ 时

$$u_n = \sum_{r=1}^{n} f_r u_{n-r} \geqslant h_{n-1}\sum_{r=1}^{n} f_r = h_{n-1}(1-F_n).$$

其中 $F_n = 1 - \sum\limits_{r=1}^{n} f_r$.

由于 $h_n=\min(u_n, h_{n-1})$，从而

$$h_n \geqslant h_{n-1}(1-F_n), \qquad n \geqslant 2.$$

由上式并注意 $f_1=u_1$得

$$h_n \geqslant u_1\prod_{r=2}^{n}(1-F_r) = \prod_{r=1}^{n}(1-F_r).$$

从假设 $u_1>0$ 推出 $u$ 是非周期的，又因 $0\leqslant F_n\leqslant F_1=1-u_1$，从而有

$$\frac{\log(1-F_n)}{F_n}\geqslant\frac{\log u_1}{1-u_1}.$$

因此有

$$u_n\geqslant\exp\left(\frac{\log u_1}{1-u_1}\sum_{r=1}^{n}F_r\right).$$

如果 $f_\infty=1-\sum_{n=1}^{\infty}f_n>0$，则 $u_\infty^{-1}=\infty$，(26) 显然成立. 如果 $f_\infty=0$，则由定理 XV 得

$$\begin{aligned}u_n&\geqslant\exp\left(\frac{\log u_1}{1-u_1}\sum_{r=1}^{\infty}F_r\right)\\&=\exp\left(\frac{\log u_1}{1-u_1}(u_\infty^{-1}-1)\right),\qquad n\in N.\end{aligned}$$ #

## §6 问题

问题 I

设 $u=(u_n,n\in N)\in\mathscr{R}$，则由定理 V 易知

(1) $$u^{(k)}=(u_n^k,n\in N)\in\mathscr{R},\qquad k\in N.$$

由于这一结果，J. F. C. Kingman 提出如下的猜测：

(2) $$u^{(h)}=(u_n^h,n\in N)\in\mathscr{R},\qquad h\geqslant 1,\ h\in R.$$

用概率方法证明(1)是极其容易的，但是欲想证明(2)则只能用纯分析方法. 上述猜测提出已经20多年了，至今未见有任何进展. 因为这是一个纯分析问题，无法引起概率论学者太大的兴趣. 其次，

也许证明(2)是十分困难的，除了应用 Kingman 不等式之外，看不到任何有希望证明(2)的其它途经.

**问题 I**

设 $P=(p_{ij},i,j\in S)$ 是随机矩阵. 由定理 I，对任意 $a\in S$，都有 $(p_{aa}^{(n)},n\in\overline{N})\in\mathscr{R}$，反之. 设 $u=(u_n,n\in\overline{N})\in\mathscr{R}$，则由定理 **I**，存在随机矩阵 $P$ 及 $a\in S$ 使 $u_n=p_{aa}^{(n)}$，$n\in\overline{N}$. 定理 1 与定理 **I** 建立的这种对应关系称为马氏链对角线元的特征刻划.

现在提出的问题是，如何给出马氏链非对角线元的特征刻划？换言之，若 $P=(p_{ij},i,j\in S)$ 是随机矩阵，当 $i\neq j$，序列 $(p_{ij}^{(n)},n\in\overline{N})$ 可否有类似于定理 I，**I** 这种形式的刻划？

上述问题的更为明确的提法是，给定序列 $a=(a_n,n\in\overline{N})$ 满足条件

(3)　$$a_0=0,\ 0\leqslant a_n\leqslant 1,\qquad n\in N.$$

如何判断是否存在某个随机矩阵 $P=(p_{ij},i,j\in S)$ 及 $c\neq d\in S$ 使

(4)　$$p_{cd}^{(n)}=a_n,\qquad n\in\overline{N}\ ?$$

对于上述问题，人们容易想到如下的途径. 设 $(X_n,n\in N)$ 是对应于 $P$ 的马氏链，则

(5)　$$p_{cd}^{(n)}=\sum_{r=1}^{n}{}_dp_{cd}^{(r)}p_{dd}^{(n-r)}.$$

其中

(6)　$${}_dp_{cd}^{(r)}=\mathbb{P}(X_1,\cdots,X_{r-1}\neq d,\ X_r=d\mid X_0=c),\qquad r\in N.$$

因此，如果序列 $a=(a_n, n\in\overline{N})$ 满足(4)，则它可以表成

(7) $$a_n=\sum_{r=1}^{n}b_r u_{n-r},\qquad n\in\overline{N}.$$

其中 $u=(u_n, n\in\overline{N})\in\mathscr{R}$，而 $b=(b_n, n\in N)$ 满足条件

(8) $$b_n\geqslant 0\ ,\ n\in N\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n\leqslant 1.$$

反之，如果 $u\in\mathscr{R}$ 和 $b$ 满足(7)，(8)，则存在随机矩阵 $P$ 及 $c, d\in S$ 使(4)成立．然而又如何根据 $a$ 确定 $u$ 及 $b$？因此问题仍然未获解决．

问题Ⅱ如能获得满意的解决，对马氏链的研究肯定是非常有意义的，特别是对连续时间马氏链的研究(参看第二章的问题)．

## 注释

Feller (1949)首先提出循环事件的概念，这实际上是离散再生现象理论与更新序列理论研究的开端．

作为教材详细叙述这些理论的书目应该首推下面的三部著作：Feller(1950)，Chung(1967)，和 Kingman(1972)．

定理Ⅰ～Ⅳ是由定义推出的一般结果，可从上述三部著作中找到证明和叙述．

定理Ⅴ，Ⅵ由 Kingman(1966)得到，亦可见 Kingman(1972)．

§2 定理Ⅶ中(18)式首先由 Hou(1982a) 得到，Hou 应用这一等式首先给出更新序列半群性的纯分析证明，以往，更新序列的半群性是用马氏链(概率)方法得到的．

§ 2 定理Ⅷ和定理Ⅸ以及 § 3 的结果参看 Feller(1949)和 Kingman(1972),Feller 定义的循环事件与离散再生现象是同一个概念.

Kaluza(1928)首先证明:任何 Kaluza 序列是更新序列,而定理Ⅻ是 Kendall (1965)的结果.

§ 5 的结果参看 Chung(1967) 和 Kingman(1972). § 6 问题Ⅰ,Ⅱ见 Kingman (1983).

# 第 二 章　连读时间再生现象

## §1　再生现象

### 1. 定 义

以 $R$ 记全体正实数集：$R=(0,\infty)$；以 $\bar{R}$ 记全体非负实数集：$\bar{R}=[0,\infty)$.

设有随机过程 $Z=(Z(t);t\in R)$,取值 0 或 1 ,称为连续时间再生现象,如果存在函数 $(p(t),t\in R)$,使当

$$0=t_0<t_1<\dots<t_n$$

时有

$$\mathbb{P}(Z(t_1)=\dots=Z(t_n)=1)=\prod_{k=1}^{n}p(t_k-t_{k-1}). \tag{1}$$

以后简称连续时间再现象为再生现象.(1)中的函数 $p(\cdot)$称为 Z 对应的 $p$-函数.

### 2. Kingmam 不等式

对 $R$ 上的任意函数 $p(\cdot)$及

$$0=t_0<t_1<\dots<t_n$$

令

$$F(t_1,\dots,t_n;p)=p(t_n)-\sum_{1\leqslant i<n}p(t_i)p(t_n-t_i) \tag{2}$$

$$+ \sum_{1\leq i<j<n} p(t_i)p(t_j - t_i)p(t_n - t_j)$$

$$+ \cdots$$

$$+ (-1)^{n-1}p(t_1)p(t_2 - t_1)\ldots p(t_n - t_{n-1}).$$

与第一章定理 Ⅵ 一样，再生现象的分析性质完全由 Kingman 不等式确定.

**定理 I**

设 $(p(t), t\in R)$ 是 $R$ 上的函数，则存在再生现象 $Z=(Z(t), t\in R)$ 且以 $p$ 作为它的 $p$-函数的充要条件是，对所有 $n\geq 1$，由(2)式所定义的 $F$ 满足

(3) $$F(t_1, \cdots, t_n; p) \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} F(t_1, \cdots, t_j; p) \leq 1.$$

**证**：与第一章定理 Ⅺ 的证明定全相同. #

### 3. 引理

设 $(p_n(t), t\in R)$，$n\in N$，是 $p$-函数列，如果对任意 $t\in R$ 都有

(4) $$\lim_{n\to\infty} p_n(t) = p(t),$$

则 $p(t)$ 是 $p$-函数.

**证**：由于 $(p_n(t), t\in R)$ 是 $p$-函数，故

$$F(t_1, \cdots, t_m; p_n) \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{m} F(t_1, \ldots, t_j; p_n) \leq 1,$$

对任意 $0=t_0<t_1<\cdots<t_m$ 都成立. 由于(4)及 $F$ 的定义立即看出仍有

$$F(t_1,\cdots,t_{m_j};p_n)\geqslant 0\ ,\qquad \sum_{j=1}^{m}F(t_1,\cdots,t_j;p_n)\geqslant 0.$$

从而 $p$ 是 $p$-函数. #

4. 半群性

对于 $p$-函数仍有如下的半群性质.

**定理 1**

如果 $(p_1(t),t\in R)$, $(p_2(t),t\in R)$ 是 $p$-函数，令

$$p(t)=p_1(t)p_2(t),\qquad t\in R\ ,$$

则 $p(t)$ 仍是 $p$-函数.

**证**：设 $(Z_1(t),t\in R)$, $(Z_2(t),t\in R)$ 是独立再生现象，它们对应的 $p$-函数是 $p_1$ 和 $p_2$，令 $Z(t)=Z_1(t)Z_2(t),t\in R$. 则当 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n$ 时

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z(t_k)=1\ ,\ 1\leqslant k\leqslant n)&=\mathbb{P}(Z_1(t_k)=Z_2(t_k)=1\ ,\ 1\leqslant k\leqslant n)\\&=\prod_{k=1}^{n}p_1(t_k-t_{k-1})p_2(t_k-t_{k-1})=\prod_{k=1}^{n}p(t_k-t_{k-1}).\end{aligned}$$ #

5. 离散骨架

设 $Z=(Z(t),t\in R)$ 是再生现象，我们补充定义 $Z(0)=1$，又设 $(p(t),t\in R)$ 是 $Z$ 对应的 $p$-函数，我们也补充定义 $p(0)=1$.

现设 $h>0$ 固定，令

$$(5)\qquad {}^hZ=(Z(nh),n\in\overline{N})\ .$$

则称 ${}^hZ$ 是 $Z$ 的离散骨架，如果 $(p(t),t\in R)$ 是 $Z$ 对应的 $p$-函数，令

$$(6)\qquad u^{(h)}=(p(nh):n\in\overline{N}).$$

由 Kingmam 不等式立即推出：如果 $(p(t), t \in R)$ 是 $p$-函数，则由(6)确定的 $u^{(h)} \in \mathscr{R}$. 其次，如果 $p$ 对应再生现象 Z，则 $u^{(h)}$ 对应离散再生现象 $^hZ$.

# §2 标准再生现象

## 6. 定义与记号

设 $Z = (Z(t), t \in R)$ 是再生现象，$(p(t), t \in R)$ 是它对应的 $p$-函数，如果成立：

(1)
$$\lim_{t \to 0} p(t) = 1$$

则称 Z 是标准再生现象，相应的 $p$-函数 $p$ 称为标准 $p$-函数。

标准 $p$-函数是我们研究的重要对象，因此给它一个专门的记号：今后以 $\mathscr{P}$ 记全体标准 $p$-函数.

## 7. 基本性质

我们来研究标准 $p$-函数的一些基本性质，对于 $p \in \mathscr{P}$，令 $p(0) = 1$. 于是 $p$ 在 0 点连续.

对于一般 $p$-函数，于 §1 Kingman 不等式(3)中取 $n = 1$ 及 2，则有

(2)
$$0 \leqslant p(t) \leqslant 1,$$

(3)
$$p(s)p(t) \leqslant p(s+t) \leqslant p(s)p(t) + 1 - p(s)$$

(2)与(3)分别是一、二阶 Kingman 不等式.

**定理 Ⅲ**

设 $p \in \mathscr{P}$，则

A. 对所有 $t \geqslant 0$，$p(t) > 0$.

B. $p$ 在$[0,\infty)$上一致连续.

C. 极限

$$q = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(1 - p(t)) \tag{4}$$

存在，且 $0 \leqslant q \leqslant \infty$ 及

$$p(t) \geqslant e^{-qt}, \qquad t \in \bar{R}. \tag{5}$$

D. 如果 $q < \infty$，则有

$$|p(t) - p(s)| \leqslant q|t - s|, \qquad t, s \in \bar{R}. \tag{6}$$

证：A. 由标准性条件，即 $t \to 0$ 时，$p(t) \to 1$，因此存在 $t_0$ 使当 $t \in [0, t_0]$时 $p(t) > 0$. 现设 $T > 0$ 是任意的，由不等式(3)知，对任意 $n \geqslant 1$

$$p(T) \geqslant p(T/n)^n$$

现取 $n > T/t_0$，则 $p(T) > 0$.

B. 由不等式(3)得

$$-p(t)(1 - p(s)) \leqslant p(s + t) - p(t)$$
$$\leqslant (1 - p(t))(1 - p(s)), \qquad s, t, \in \bar{R}.$$

从而

$$|p(t + s) - p(t)| \leqslant 1 - p(s). \tag{7}$$

于是 $p$ 在$[0,\infty)$上一致连续。

C. 由于 $0 < p(t) \leqslant 1$，令

$$\varphi(t) = \log p(t), \qquad t \in \bar{R}.$$

则

$$\varphi(t + s) \leqslant \varphi(t) + \varphi(s), \qquad t, s \in \bar{R}. \tag{8}$$

令

$$q = \sup_{t>0} \frac{\varphi(t)}{t} \leqslant \infty. \tag{9}$$

设 $0<h<t$, $t=nh+s$, $n$ 为正整数,而 $0\leqslant s<h$. 由(8)

$$\frac{\varphi(t)}{t} \leqslant \frac{n\varphi(h)}{t} + \frac{\varphi(s)}{t} = \frac{\varphi(h)}{h} \cdot \frac{nh}{t} + \frac{\varphi(t)}{t}.$$

令 $h\to 0$, 则自然 $s\to 0$, 所以

$$\frac{\varphi(t)}{t} \leqslant \lim_{h\to 0} \inf \frac{\varphi(h)}{h}.$$

从而得

$$\lim_{t\to 0} \sup \frac{\varphi(t)}{t} \leqslant \sup_{t>0} \frac{\varphi(t)}{t} \leqslant \lim_{t\to 0} \inf \frac{\varphi(t)}{t}. \tag{10}$$

由(9),(10)得

$$q = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)}{t}.$$

最后我们得

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-p(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1-e^{-\varphi(t)}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)}{t} \cdot \frac{1-e^{-\varphi(t)}}{\varphi(t)} = q.$$

这就证明了 (4)式. 又由(9),对任意 $t\in \bar{R}$ 有

$$\varphi(t) = -\log p(t) \leqslant qt.$$

由此得(5).

D.　当 $q<\infty$ 时, 由(7)及(5)得

$$|p(t+s)-p(t)| \leqslant 1-p(|t-s|)$$

$$\leqslant 1-e^{-q|t-s|} \leqslant q|t-s|, \qquad t,s \in R.$$

于是得(6). #

**定理 Ⅳ**

设 $p\in\mathscr{P}$，则下述极限存在

$$p(\infty)=\lim_{t\to\infty}p(t).$$

证：由定理Ⅱ中A，更新序列 $(p(nh),n\in\overline{N})$ 是非周期的，其中 $h>0$，从而由第一章定理XV，对任意 $h>0$，极限

$$l(h)=\lim_{n\to\infty}p(nh)$$

存在．记

$$\psi(h)=\sup_{0<t\leqslant h}(1-p(t)).$$

于是由(7)得

$$|p(t)-p([t/h]h)|\leqslant\psi(h).$$

其中$[t/h]$表示 $t/h$ 的整数部分，从而

$$p(t)\leqslant p([t/h]h)+\psi(h),$$

及

$$p(t)\geqslant p([t/h]h)-\psi(h).$$

于是有

$$l(h)-\psi(h)\leqslant\lim_{t\to\infty}\inf p(t)\leqslant\lim_{t\to\infty}\sup p(t)\leqslant l(h)+\psi(h).$$

即

$$\lim_{t\to\infty}\sup p(t)-\lim_{t\to\infty}\inf p(t)\leqslant 2\psi(h).$$

由于 $h\to0$ 时，$\psi(h)\to0$，从而 $\lim\limits_{t\to\infty}p(t)$存在. #

# §3　再生现象的例

## 8. 标准马氏链的对角线元

更新序列与离散时间马氏链对角线元虽然定义不同，但由第一章定理 I 知，它们实质上是我们所研究的同一对象，对于连续时间的再生现象，情形就完全两样了。

设 $S$ 是有限或可列集，$X=(X(t):t\in R)$是取值于 $S$ 上的随机过程，如果它满足下述条件：对任意 $0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，以及 $i_1\in S,\cdots,i_n\in S$ 有

$$(1)\qquad \mathbb{P}(X(t_n)=i_n|X(t_j)=i_j,1\leqslant j\leqslant n-1)=\mathbb{P}(X(t_n)=i_n|X(t_{n-1})=i_{n-1}),$$

则称 $X$ 是马氏链. 如果马氏链 $X$ 的转移概率阵

$$\mathbb{P}(X(t)=j|X(s)=i),\qquad i,j\in s,\ 0<s<t,$$

只与 $t-s$ 有关，则称 $X$ 是时齐马氏链，但是因为我们只讨论时齐马氏链，今后就简称为马氏链。

对马氏链 $X$，令

$$(2)\quad p_{ij}(t)=\mathbb{P}(X(t+s)=j|X(s)=i),\ i,j\in S,\ s,t\in R.$$

则我们得到 $R$ 上的矩阵函数：

$$(3)\qquad P(t)=(p_{ij}(t),i,j\in S),\qquad t\in R.$$

矩阵函数(3)满足下述关系

$$(4)\quad p_{ij}(t)\geqslant 0,\ i,j\in S,\ \sum_{j\in s}p_{ij}(t)=1,\quad i\in S,\ t\in R.$$

和

$$(5)\quad p_{ij}(t+s)=\sum_{k\in s}p_{ik}(t)p_{kj}(s),\qquad t,s\in R,\ i,j\in S.$$

(5)也可写成矩阵形式

$$P(t+s)=P(t)P(s),\qquad t,s\in R.$$

我们称 $(P(t),t\in R)$是马氏链 $X$ 的转移概率矩阵. 如果 $X$ 是马氏链,$(P(t),t\in R)$是它的转移概率矩阵,如果还成立

$$\lim_{t\to 0} p_{ij}(t)=\delta_{ij},\qquad i,j\in S \tag{6}$$

则称 $X$ 是标准马氏链,而$(P(t),t\in R)$被称为标准随机矩阵.

反之,如果给定满足条件(4)、(5)、(6)的标准随机矩阵,则由 Kolmogorov 定理,必定存在马氏链使(1)与(2)成立.

对于标准随机矩阵,恒补充定义

$$p_{ij}(0)=\delta_{ij},\qquad i,j\in S$$

或者写成矩阵: $P(0)=I$.

设 $X=(X(t),t\in R)$ 是标准马氏链且 $X(0)=a\in S$ 以 $(P(t),t\in \overline{R})$作为它的转移概率矩阵,如果

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_n,$$

则显然有

$$\mathbb{P}(X(t_1)=\cdots=X(t_n)=a)=\prod_{k=1}^{n}p_{aa}(t_k-t_{k-1}).$$

从而有

$$(p_{aa}(t),\ t\in \overline{R})\in\mathscr{P}. \tag{7}$$

我们以 $\mathscr{P}_M$ 记全体标准随机矩阵的对角线元,由(7)我们有下述包含关系

$$\mathscr{P}_M\subset\mathscr{P}. \tag{8}$$

然而,与离散参数本质上不同的是,包含关系(8)的反包含关系不成立,因此 $\mathscr{P}$ 是实质上比 $\mathscr{P}_M$ 更广泛的概念,但究竟广泛多少?这是我们今后要研究的问题.

## 9. $\mathscr{L}$ 型标准 $p$-函数

设 $u=(u_n,n\in\overline{N})\in\mathscr{R}$. 于是存在有限或可列集 $S$ 上的随机矩阵 $(p_{ij},\ i,j\in S)$ 及 $a\in S$ 使

$$u_n = p_{aa}^{(n)}, \qquad n\in\overline{N}.$$

又设 $\pi_n(\mu),n\in\overline{N})$ 是强度为 $\mu>0$ 而取值于 $\overline{N}$ 上的 Poisson 分布，即

$$\pi_n(\mu) = e^{-\mu}\mu^n/n!\ , \qquad n\in\overline{N}. \tag{9}$$

现在对固定的 $\lambda>0$，令

$$p_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)}(t)\pi_n(\lambda t), \qquad i,j\in s, t\geqslant 0. \tag{10}$$

不难证明 $P(t)=(p_{ij}(t),i,j\in S)$，$t\in\overline{R}$，是标准转移矩阵，于是

$$p_{aa}(\cdot)\in\mathscr{P}_M\subset\mathscr{P}.$$

从而，对任意 $u=(u_n,n\in\overline{N})\in\mathscr{R},\lambda>0$，令

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\pi_n(\lambda t), \qquad t\in\overline{R}. \tag{11}$$

则 $p\in\mathscr{P}$. 形如(11)的标准 $p$-函数称为 $\mathscr{L}$ 型 $p$-函数，以 $\mathscr{L}$ 记全体 $\mathscr{L}$ 型 $p$-函数。则我们有

$$\mathscr{L}\subset\mathscr{P}_M\subset\mathscr{P}. \tag{12}$$

下面的定理指出，在逐点收敛意义下，$\mathscr{L}$ 在 $\mathscr{P}$ 中稠.

**定理 V**

设 $p\in\mathscr{P}$ . 则存在序列 $(p_k,k\in N)\subset\mathscr{L}$，使对所有 $t\in\overline{R}$，

$$\lim_{k\to\infty} p_k(t) = p(t)\ . \tag{13}$$

**证**：因为

$$(p(nk^{-1}),n\in\overline{N})\in\mathscr{R}\ , \qquad k\in N.$$

于是有：$(p_k(t), t \in \bar{R}) \in \mathscr{L}, k \in N$. 其中

$$p_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p(nk^{-1}) \pi_n(kt).$$

当任给 $\varepsilon > 0$ 时，选取 $\delta > 0$ 使

$$(14) \quad |p(s) - p(t)| < \frac{1}{2}\varepsilon, \qquad s, t \in \bar{R} \text{ 且 } |s - t| < \delta.$$

则由(14)得

$$(15) \quad \begin{aligned} |p(t) - p_k(t)| &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |p(t) - p(nk^{-1})| \pi_n(kt). \\ &\leqslant \frac{1}{2}\varepsilon \sum_{|n-kt|<k\delta} \pi_n(kt) + \sum_{|n-kt|\geqslant k\delta} \pi_n(kt) \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon + \sum_{|n-kt|\geqslant k\delta} \pi_n(kt) \end{aligned}$$

应用 Tchebychev 不等式到 Poisson 分布得

$$(16) \quad \sum_{|n-kt|\geqslant k\delta} \pi_n(kt) \leqslant t/k\delta^2$$

选取 $k > 2t/\varepsilon\delta^2$，由(15)，(16) 得

$$|p(t) - p_k(t)| < \varepsilon. \qquad \#$$

## 10. $B$ 型 $p$-函数

设 $B(x)$ $(x \in (0, \infty])$是 $(0, \infty]$ 上的概率分布，又设相互独立随机变量序列$(X_n, n \in N)$ 分别有分布：

$$(17) \quad \mathbb{P}(X_{2k-1} \leqslant x) = 1 - e^{-ax}, \qquad k = 1, 2, 3, \cdots.$$

其中 $a > 0$ 而

$$(18) \quad \mathbb{P}(X_{2k} \leqslant x) = B(x), \qquad k = 1, 2, 3, \cdots.$$

并命

$$(19) \quad S_0 = 0,\ S_n = X_1 + \cdots + X_n, \qquad (n \in N).$$

现在定义随机过程$(Z(t), t \in R)$，如下：

$$Z(t)=\begin{cases}1, & S_{2n}<t\leqslant S_{2n+1}, \quad n\in \bar{N};\\ 0, & S_{2n+1}<t\leqslant S_{2n+2}, \quad n\in \bar{N}.\end{cases}$$

假定对某个 $T>0, Z(T)=1$. 于是存在正整数 $m, S_{2m}<T\leqslant S_{2m+1}$. 容易算出 $S_{2m+1}-T$ 仍有负指数分布(17)，显然，在 $Z(T)=1$ 的条件下，$(Z(T+t),t>0)$ 与 $(Z(s),s<T)$ 独立且

$$\mathbb{P}(Z(T+t)=1\,|\,Z(T)=1)=\mathbb{P}(Z(t)=1), \qquad t>0.$$

于是

$$\mathbb{P}(Z(T+t)=1, Z(T)=1)=\mathbb{P}(Z(T)=1)\,\mathbb{P}(Z(t)=1), \qquad t>0.$$

同理，当 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n$ 时

$$\mathbb{P}(Z(t_i)=1, 1\leqslant i\leqslant n)$$
$$=\mathbb{P}(Z(t_1)=1)\prod_{k=2}^{n}\mathbb{P}(Z(t_k-t_{k-1})=1).$$

因此，$Z=(Z(t),t\in R)$ 是再生现象，它对应的 $p$-函数是

$$p(t)=\mathbb{P}(Z(t)=1)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(S_{2n}<t\leqslant S_{2n+1}).$$

我们注意，$p$ 是标准的，事实上

$$p(t)\geqslant \mathbb{P}(S_1\geqslant t)=e^{-at}, \qquad t>0.$$

从而 $p\in\mathscr{P}$.

我们在本节所举的三个标准 $p$-函数的例子：标准马氏链的对角线元；$\mathscr{L}$ 型 $p$-函数；B 型 $p$-函数，今后还要更深入地研究它们.

## 注释

首先提出再生现象这一名词并加以系统研究的是 Kingman (1963, 1964, 1965a, 1972). 本章的叙述方式与基本结果均取材于 Kingman (1972).

# 第三章　$p$-函数论

## §1　标准 $p$- 函数的拉氏变换

### 1. $\mathscr{L}$ 型 $p$-函数的拉氏变换

在研究标准 $p$-函数的拉氏变换的一般形式之前，我们先研究一些具体的例子.

设 $p\in\mathscr{L}$，于是存在 $u=(u_n,n\in\overline{N})\in\mathscr{R}$，及 $\lambda>0$ 使

$$p(t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n\pi_n(\lambda t)\ ,\qquad t\geqslant 0. \tag{1}$$

其中$(\pi_n(\cdot).\ n\in N)$ 是 Poisson 分布，即当 $\mu\geqslant 0$ 时：

$$\pi_n(\mu)=\frac{\mu^n}{n!}e^{-\mu},\qquad n\in N. \tag{2}$$

考虑形如(1)的函数 $p$ 的拉氏变换：

$$\psi_p(\theta)=\int_0^{\infty}e^{-\theta t}p(t)dt\ ,\qquad \theta>0. \tag{3}$$

将(1)代入(3)并注意(2)得到：

$$\begin{aligned}\psi_p(\theta)&=\int_0^{\infty}e^{-\theta t}\sum_{n=0}^{\infty}u_n\pi_n(\lambda t)\ dt \\ &=\sum_{n=0}^{\infty}u_n\int_0^{\infty}\frac{1}{n!}e^{-\theta t}e^{-\lambda t}(\lambda t)^n dt\end{aligned} \tag{4}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} \frac{\lambda^n}{(\lambda+\theta)^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^n d\tau$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{\lambda^n}{(\lambda+\theta)^{n+1}}, \qquad \theta > 0.$$

现设$(f_n, n \in N)$是 $u$ 对应的 $F$ 序列，则将

$$u_0 = 1, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} f_k u_{n-k}, \qquad n \in N,$$

代入$(u_n,\ n \in \bar{N})$ 的母函数得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = \frac{1}{\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n\right)}, \qquad 0 \leqslant z < 1. \tag{5}$$

将(5)代入(4)，取 $z = \lambda/(\theta+\lambda)$，得

$$\psi_p(\theta) = \frac{1}{\theta+\lambda}\left[\frac{1}{1 - \sum_{n=1}^{\infty} f_n \left(\frac{\lambda}{\theta+\lambda}\right)^n}\right] \tag{6}$$

$$= \frac{1}{\theta + \lambda(1 - f_1) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n \lambda^n}{(\theta+\lambda)^{n-1}}}, \qquad \theta > 0.$$

如果 $f_1 = 1$，则 $\psi_p(\theta) = 1/\theta$，此时 $u_n = 1\ (n \in \bar{N})$，又由(1)有 $p(t) \equiv 1 (t \in R)$. 如果 $f_1 < 1$，则 $1 - f_1 = \sum_{n=2}^{\infty} f_n + f_\infty$. 因此(6)可写成

$$\psi_p(\theta) = \frac{1}{\theta + \lambda \sum_{n=2}^{\infty} f_n \left(1 - \frac{\lambda^{n-1}}{(\theta+\lambda)^{n-1}}\right) + \lambda f_\infty}, \tag{7}$$

$$\theta > 0.$$

但是

$$\frac{1}{(\theta+\lambda)^{n-1}} = \frac{1}{(n-2)!} \int_0^{\infty} t^{n-2} e^{-\lambda t} e^{-\theta t} dt, \tag{8}$$

$$\theta > 0\ ,\ n \geqslant 2\ .$$

和

(9)
$$\frac{1}{(n-2)!}\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}t^{n-2}dt = \frac{1}{\lambda^{n-1}}\ ,\qquad \lambda > 0\ ,\ n \geqslant 2.$$

将(8)与(9)代入(7)中得

(10) $\psi_p(\theta)$

$$= \frac{1}{\theta + \int_0^{\infty}(1-e^{-\theta t})\sum_{n=2}^{\infty}\frac{f_n}{(n-2)!}\lambda^{n-1}t^{n-2}e^{-\lambda t}dt + \lambda f_{\infty}}\ ,$$

$$\theta > 0.$$

现在我们取$(0,\infty]$上的测度如下：以$\mathscr{B}(0,\infty]$记$(0,\infty]$上全体 Lebesgue 可测集类. 令

(11)
$$\mu(A) = \int_{A\cap(0,\infty)}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{f_n}{(n-2)!}\lambda^{n-1}t^{n-2}e^{-\lambda t}dt + \lambda f_{\infty}\delta_{\infty}(A)\ ,\qquad A \in \mathscr{B}(0,\infty].$$

其中$\delta_{\infty}(\cdot)$是点$\infty$处的单点测度，将(11)代入(10)中得

(12)
$$\psi_p(\theta) = \frac{1}{\theta + \int_{(0,\infty]}(1-e^{-\theta t})\mu(dt)}\ ,\qquad \theta > 0.$$

(12)是我们需要的最终形式，它可以表述为：任意$p\in\mathscr{L}$的拉氏变换，都可以表成(12)的形式，其中$\mu$是$(0,\infty]$上的测度.

## 2. B 型 $p$-函数的拉氏变换

第二章§3已经给出了 B 型 $p$-函数的定义. 现在计算它的拉氏变换，为了方便，首先简要地重提一下它的定义.

设$(X_n, n\in N)$是相互独立的非负随机变量序列. 它们有分布：

(13)
$$\mathbb{P}(X_{2k+1} \leqslant x) = 1 - e^{-ax}\ ,\qquad k = 0,1,2,\cdots.$$

其中 $a>0$，及

(14)　　$\mathbb{P}(X_{2k}\leqslant x)=B(x)$，　　$k=1,2,\cdots$.

其中 $B(\cdot)$是$(0,\infty]$ 上的概率分布函数，它在 $\infty$ 处可以有质量.

令

$$S_0=0\ ,\ S_n=X_1+\cdots+X_n,\qquad n\geqslant 1\ .$$

现在定义随机过程$(Z(t),\ t\in R)$：

$$(15)\qquad Z(t)=\begin{cases}1\ , & S_{2n}<t\leqslant S_{2n+1},\\ 0\ , & S_{2n+1}<t\leqslant S_{2n+2},\end{cases}\qquad n\in\overline{N}.$$

在第二章§3 已证：$(Z(t),t\in R)$ 是标准再生现象，它对应的 $p$-函数是

$$(16)\qquad p(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(S_{2k}<t\leqslant S_{2k+1})\quad ,\qquad t\in R.$$

下面我们来计算形如(16)的 $p$-函数的拉氏变换，我们有

$$(17)\quad \psi_r(\theta)=\int_0^{\infty}p(t)\ e^{-\theta t}dt=E\int_0^{\infty}Z(t)\ e^{-\theta t}dt$$

$$=E\sum_{n=0}^{\infty}\int_{S_{2n}}^{S_{2n+1}}e^{-\theta t}dt$$

$$=\theta^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(E(e^{-\theta S_{2n}})-E(e^{-\theta S_{2n+1}})\Big)\ ,\qquad \theta>0\ .$$

但是

$$E\ e^{-\theta S_{2n}}=\int_0^{\infty}e^{-\theta t}F^{(2n)}(dt).$$

其中

$$F^{(2n)}(x)=\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_{2n}\leqslant x)\ ,\qquad x\in R.$$

由于 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，故

$$(18)\qquad Ee^{-\theta S_{2n}}=\Big(\int_0^{\infty}e^{-\theta t}d(1-e^{-at})\Big)^n\Big(\int_0^{\infty}e^{-\theta t}dB(t)\Big)^n$$

$$= \left(\frac{a}{\theta + a}\right)^n \left(\int_0^\infty e^{-\theta t} dB(t)\right)^n.$$

同样的计算得

$$Ee^{-\theta S_{2n+1}} = \left(\frac{a}{\theta + a}\right)^{n+1} \left(\int_0^\infty e^{-\theta t} dB(t)\right)^n. \tag{19}$$

将(18),(19)代入(17) 得

$$\begin{aligned}
\psi_r(\theta) &= \theta^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{\theta + a}\right)^n \left(1 - \frac{a}{\theta + a}\right) \left(\int_0^\infty e^{-\theta t} dB(t)\right)^n \\
&= \frac{1}{\theta + a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{\theta + a} \int_0^\infty e^{-\theta t} dB(t)\right)^n \\
&= \frac{1}{\theta + a} \frac{1}{1 - \dfrac{a}{\theta + a} \displaystyle\int_0^\infty e^{-\theta t} dB(t)} \\
&= \frac{1}{\theta + a \displaystyle\int_{(0,\infty]} (1 - e^{-\theta t})\, dB(t)} \\
&= \frac{1}{\theta + \displaystyle\int_{(0,\infty]} (1 - e^{-\theta t}) d\mu}, \qquad \theta > 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

其中 $\mu$,$\mu((0,t]) = aB(t)$,是$(0,\infty]$上的有限测度.

上面给出的两类标准 $p$-函数的拉氏变换有相同的形式(见(12)与(20)). 注意到 $\mathscr{L}$ 在 $\mathscr{P}$ 中稠,自然地我们可以推想,一般标准 $p$-函数的拉氏变换也应具有类似的形式. 为了回答这一问题,我们给出两个预备性的引理.

## 3. 引理 A

设 $\mu$ 是$(0,\infty]$上的测度,满足条件

$$\int_{(0,\infty]} (1 - e^{-x}) d\mu < \infty. \tag{21}$$

并记

(22)　　$$m(t) = \mu(t,\infty], \qquad t \in R.$$

则有

(23)　　$$\int_0^1 m(t)dt < \infty.$$

**证**：首先注意，在条件(21)之下，对任意 $\varepsilon>0$，必有 $\mu((\varepsilon,\infty])<\infty$. 因此

$$\begin{aligned}\int_0^1 m(t)dt &= \int_0^1 \int_{(t,\infty]} dt\mu(dx) = \int_{(0,\infty]} \int_0^{\min(x,1)} dt\ \mu(dx) \\ &= \int_{(0,\infty]} \min(x,1)\ \mu(dx) \\ &\leqslant 2\int_{(0,\infty]} (1-e^{-x})\mu(dx) < \infty.\end{aligned}$$　　#

4. 引理 B

设 $\mu$ 是 $(0,\infty]$ 上的测度满足条件(21). 则存在 $[0,\infty)$ 上唯一的连续函数 $p(t)(t\in R)$ 和 $\alpha\geqslant 0$ 使

(24)　　$$\begin{aligned}\psi_p(\theta) &= \int_0^\infty p(t)\ e^{-\theta t}dt \\ &= \left(\theta + \int_{(0,\infty]} (1-e^{-\theta x})\mu(dx)\right)^{-1}, \qquad \theta > \alpha.\end{aligned}$$

**证**：令

(25)　　$$m(t) = \mu(t,\infty], \qquad t > 0.$$

则 $m(t)$ 是 $t$ 的不增函数，由(23)知

(26)　　$$\psi_m(\theta) = \int_0^\infty m(t)\ e^{-\theta t}dt, \qquad \theta > 0$$

存在. 而且由 Fubini 定理,

$$(27)\qquad \psi_m(\theta)=\int_0^\infty e^{-\theta t}dt\int_{(t,\infty]}\mu(dx)$$

$$=\int_0^\infty\int_0^x e^{-\theta t}dt\ \mu(dx)+\frac{1}{\theta}\mu(\{\infty\})$$

$$=\frac{1}{\theta}\int_{(0,\infty]}(1-e^{-\theta x})\ \mu(dx).$$

从而

$$\lim_{\theta\to\infty}\psi_m(\theta)=0.$$

注意 $\psi_m(\theta)$是 $\theta$ 的不增函数,于是可取 $a\geqslant0$, 使当 $\theta\geqslant a$ 时 $\psi_m(\theta)<1$.

现以 $m^{(n)}(t)$记 $m(t)$的 $n$ 次卷积,它由下面的公式归纳地定义:

$$(28)\qquad m^{(n)}(t)=\int_0^t m^{(n-1)}(t-x)m(x)dx\ ,\qquad n\geqslant2.$$

于是对 $m^{(n)}(t)$的拉氏变换有

$$(29)\qquad \psi_{m^{(n)}}(\theta)=\int_0^\infty e^{-\theta t}m^{(n)}(t)dt=(\psi_m(\theta))^n,\qquad n\geqslant1.$$

于是当 $\theta\geqslant a$ 时,

$$(30)\qquad \sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty m^{(n)}(t)e^{-\theta t}dt=\sum_{n=1}^\infty(\psi_m(\theta))^n<\infty\ ,\quad \theta\geqslant a.$$

令

$$(31)\qquad b(t)=\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n-1}m^{(n)}(t)\ ,\qquad t\in R.$$

由(30)及 Fubini 定理易见,(31)右边的级数几乎处处绝对收敛,而且它的拉氏变换是

$$(32)\qquad \psi_b(\theta)=\int_0^\infty b(t)e^{-\theta t}dt=\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n-1}(\psi_m(\theta))^n$$

$$= \psi_m(\theta)(1 + \psi_m(\theta))^{-1}, \qquad \theta \geqslant a.$$

现令

$$p(t) = 1 - \int_0^t b(s)ds, \qquad t \in \overline{R}. \tag{33}$$

则由 Fubini 定理

$$\begin{aligned}\psi_p(\theta) &= \int_0^\infty p(t)e^{-\theta t}dt = \frac{1}{\theta} - \int_0^\infty e^{-\theta t}\int_0^t b(s)dsdt \\ &= \frac{1}{\theta} - \int_0^\infty \int_s^\infty b(s)e^{-\theta t}dtds \\ &= \frac{1}{\theta}(1 - \psi_b(\theta)), \qquad \theta \geqslant a.\end{aligned}$$

现将(32)代入上式得

$$\psi_p(\theta) = (\theta + \theta\psi_m(\theta))^{-1}, \qquad \theta \geqslant a. \tag{34}$$

再由(27)，最后得

$$\psi_p(\theta) = \left(\theta + \int_{(0,\infty]}(1 - e^{-\theta x})\mu(dx)\right)^{-1}, \qquad \theta \geqslant a.$$

显然 $p(t)$是 $\overline{R}$ 上的连续函数，且它的拉氏变换满足(24)，而且 $p$ 由$(\psi_p(\theta), \theta \geqslant a)$唯一决定. #

## 5. 标准 $p$-函数的拉氏变换

现在我们可以叙述本节的基本结果，为了方便，以 $\Lambda$ 记满足条件(21)的全体$(0,\infty]$上的测度. 下述定理，通过拉氏变换建立了 $\mathscr{P}$ 与 $\Lambda$ 之间的一一对应关系.

**定理 1**

如果 $p \in \mathscr{P}$，则存在唯一的 $\mu \in \Lambda$ 使

$$\psi_p(\theta) = \int_0^\infty p(t)e^{-\theta t}dt = \left(\theta + \int_{(0,\infty]}(1 - e^{-\theta x})\mu(dx)\right)^{-1}, \tag{35}$$

$$\theta \geqslant 0.$$

反之，如果 $\mu \in \Lambda$，则存在唯一的 $p \in \mathscr{P}$ 使(35)成立.

证：如果 $p \in \mathscr{L}$，则由(12)，$\psi_p(\theta)(\theta>0)$ 已有(35)的形式，其中 $\mu$ 由(11)给定. 由于此时 $\mu$ 是 $(0,\infty]$ 上的有限测度，故 $\mu \in \Lambda$.

现设 $p \in \mathscr{P}$，于是由第二章定理V，存在 $(p_k \in \mathscr{L}, k \in N)$ 使

$$\lim_{k\to\infty} p_k(t) = p(t), \qquad t \in \overline{R}. \tag{36}$$

由控制收敛定理，我们有

$$\lim_{k\to\infty} \psi_{p_k}(\theta) = \psi_p(\theta), \qquad \theta > 0. \tag{37}$$

但是 $\psi_{p_k}$ 已有形式(35)，即存在 $(0,\infty]$ 上的全有限测度 $\mu_k$ 使

$$\psi_{p_k}(\theta) = \left(\theta + \int_{(0,\infty]} (1 - e^{-\theta x})\mu_k(dx)\right)^{-1}, \qquad \theta \geqslant 0. \tag{38}$$

在(38)中取 $\theta=1$，并注意(37)得

$$(\psi_p(1))^{-1} = \lim_{k\to\infty}\left(1 + \int_{(0,\infty]} (1 - e^{-x})\mu_k(dx)\right).$$

因为 $\psi_p(1) > 0$，故 $\left(\int_{(0,\infty]} (1-e^{-x})\mu_k(dx),\ k \in N\right)$ 有界，即存在 $M>0$，使

$$\int_{(0,\infty]} (1 - e^{-x})\mu_k(dx) < M, \qquad k \in N. \tag{39}$$

现令

$$L_k(A) = \int_A (1 - e^{-x})\mu_k(dx), \qquad A \in \mathscr{B}(0,\infty]. \tag{40}$$

则(38)可以写成

$$\begin{aligned}\psi_{p_k}(\theta) &= \left(\theta + \int_{(0,\infty]} \frac{1-e^{-\theta x}}{1-e^{-x}} L_k(dx)\right)^{-1} \\ &= \left(\int_{[0,\infty]} \frac{1-e^{-\theta x}}{1-e^{-x}} L_k(dx)\right)^{-1}, \qquad \theta > 0.\end{aligned} \tag{41}$$

其中我们将被积函数 $\frac{1-e^{-\theta x}}{1-e^{-x}}$ 连续地拓广到 0，因此它在 0 点取值是 $\theta$. 并命 $L_k(\{0\})=1$.

现在由(39)及(40)得

$$L_k([0,\infty])<M+1, \qquad k\in N. \tag{42}$$

于是$(L_k,k\in N)$是紧空间$[0,\infty]$上的有界测度列，从而存在子列$(k_n,n\in N)$及$[0,\infty]$上的全有限测度 $L$ 使得

$$L_{k_n}\Rightarrow L.$$

其中$\Rightarrow$表示弱收敛，即若以 $C[0,\infty]$记$[0,\infty]$上全体有界连续函数，则对任意 $f\in C[0,\infty]$有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,\infty]}f(x)L_{k_n}(dx)=\int_{[0,\infty]}f(x)L(dx). \tag{43}$$

而且显然有

$$L([0,\infty])\leqslant M+1. \tag{44}$$

现对任意 $\theta>0$，令

$$f_\theta(x)=\begin{cases}\theta, & x=0,\\ \dfrac{1-e^{-\theta x}}{1-e^{-x}}, & 0<x<\infty,\\ 1, & x=\infty.\end{cases} \tag{45}$$

则 $f_\theta\in C[0,\infty]$，从而由(37)，(41)，(43)得

$$\begin{aligned}\psi_p(\theta)&=\lim_{n\to\infty}\left(\int_{[0,\infty]}\frac{1-e^{-\theta x}}{1-e^{-x}}L_{k_n}(dx)\right)^{-1}\\&=\left(\int_{[0,\infty]}\frac{1-e^{-\theta x}}{1-e^{-x}}L(dx)\right)^{-1}, \qquad \theta>0.\end{aligned} \tag{46}$$

现在我们证明：表达式(46)中，由 $p$ 所对应的 $L$ 是唯一的. 事实上，对 $\theta>0$，由(45)有

$$f_{\theta+1}(x) - f_\theta(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ e^{-\theta x}, & 0 < x < \infty, \\ 0, & x = \infty. \end{cases}$$

则我们有

(47) $(\psi_r(\theta+1))^{-1} - (\psi_r(\theta))^{-1} = \int_{[0,\infty]} e^{-\theta x} L(dx), \quad \theta > 0.$

于是如果另有$[0,\infty]$上的有限测度$L'$使(46)成立，则由(47)必有

$$\int_{[0,\infty]} e^{-\theta x} L(dx) = \int_{[0,\infty]} e^{-\theta x} L'(dx), \qquad \theta > 0.$$

由经典的拉氏变换理论，$L=L'$.

现在我们证明表达式(46)中的$L$满足$L(\{0\})=1$，由控制收敛定理我们有

(48)
$$\lim_{\theta\to\infty} \theta\psi_r(\theta) = \lim_{\theta\to\infty}\int_0^\infty \theta e^{-\theta t} dt$$
$$= \lim_{\theta\to\infty}\int_0^\infty p\left(\frac{t}{\theta}\right) e^{-t} dt = p(0) = 1.$$

又由控制收敛定理得

(49)
$$\lim_{\theta\to\infty}\int_{[0,\infty]} \frac{1-e^{-\theta x}}{\theta(1-e^{-x})} L(dx) = L(\{0\}) = 1.$$

由(46),(48),(49)得$L(\{0\})=1$. 因此(46)又可写成

(50)
$$\psi_r(\theta) = \left(\theta + \int_{(0,\infty]} \frac{1-e^{-\theta x}}{(1-e^{-x})} L(dx)\right)^{-1}, \qquad \theta > 0.$$

现令

(51)
$$\mu(A) = \int_A \frac{1}{1-e^{-x}} L(dx), \qquad A \in \mathscr{B}(0,\infty].$$

从而最后得

$$\psi_r(\theta) = \left(\theta + \int_{(0,\infty]} (1-e^{-\theta x})\mu(dx)\right)^{-1}, \qquad \theta > 0.$$

由于 $L$ 由 $p$ 唯一决定，由(51)知，$\mu$ 亦由 $p$ 唯一决定，再由(51)易见，$\mu\in\Lambda$. 这就证明了定理的前半部分.

反之，设 $\mu\in\Lambda$，首先假设 $\mu$ 是 $(0,\infty]$ 上的有限测度，即 $\mu((0,\infty])<\infty$，令

$$B(x)=\frac{1}{\mu((0,\infty])}\mu((0,x]),\qquad x\in R.$$

则由本节第2段，我们可以构造 B 型 $p$-函数 $p$，使 $p$ 的拉氏变换有形式(20)，其中 $a=\mu((0,\infty])$. 但形式(20)与(35)是相同的.

现设 $\mu\in\Lambda$ 不一定是有限测度. 对任意 $\varepsilon>0$，定义 $\mu_\varepsilon$ 如下：

$$\mu_\varepsilon(A)=\mu(A\cap(\varepsilon,\infty]),\qquad A\in\mathscr{B}(0,\infty].$$

则 $\mu_\varepsilon((0,\infty])=\mu((\varepsilon,\infty])<\infty$. 于是存在 B 型 $p$-函数 $p_\varepsilon\in\mathscr{P}$ 使它的拉氏变换是

$$\begin{aligned}\psi_{p_\varepsilon}(\theta)&=\left(\theta+\int_{(0,\infty]}(1-e^{-\theta x})\mu_\varepsilon(dx)\right)^{-1}\\&=\left(\theta+\int_{(\varepsilon,\infty]}(1-e^{-\theta x})\mu(dx)\right)^{-1},\qquad\theta>0.\end{aligned}$$

现令

$$m_\varepsilon(t)=\mu_\varepsilon((t,\infty]),\qquad m(t)=\mu((t,\infty]),\qquad t>0.$$

则易见 $m_\varepsilon(t)\leqslant m(t)$ $(\varepsilon>0\ t>0)$ 且

$$\lim_{\varepsilon\to0}m_\varepsilon(t)=m(t),\qquad t>0.$$

以 $m_\varepsilon^{(n)},m^{(n)}$ 分别记 $m_\varepsilon$ 与 $m$ 的 $n$ 次卷积($n\in N$). 则亦有

$$\lim_{\varepsilon\to0}m_\varepsilon^{(n)}(t)=m^{(n)}(t),\qquad n\in N,\ t>0.$$

从而由引理 B.(33)以及控制收敛定理得

$$p(t)=1-\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}m^{(n)}(t)dt$$

$$= 1 - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} m_\varepsilon^{(n)}(t) dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} p_\varepsilon(t) , \qquad t \in R .$$

然而 $p_\varepsilon \in \mathscr{P}(\varepsilon > 0)$，由第二章§1的引理知，$p$ 是 $p$—函数，由上式知 $p$ 是标准的，故 $p \in \mathscr{P}$.

再次应用控制收敛定理，立即得

$$\psi_p(\theta) = \int_0^\infty p(t) e^{-\theta t} dt = \lim_{\varepsilon \to \infty} \int_0^\infty p_\varepsilon(t) e^{-\theta t} dt$$

$$= \left( \theta + \int_{(0,\infty]} (1 - e^{-\theta x}) \mu(dx) \right)^{-1}, \qquad \theta > 0 . \quad \#$$

由定理Ⅰ，$\mathscr{P}$ 与 $\Lambda$ 是一一对应的，如果 $p \in \mathscr{P}$，$\mu \in \Lambda$ 成立关系(35)，则称 $\mu$ 是 $p$ 的典型测度，并记作 $p \sim \mu$.

**定理 I**

设 $p \in \mathscr{P}$，$p \sim \mu \in \Lambda$，令

$$m(t) = \mu((t, \infty]) , \qquad t \in R. \tag{52}$$

则有

$$p(t) = 1 - \int_0^t p(t-s) m(s) ds , \qquad t \in R. \tag{53}$$

**证**：由引理 B 已证，存在 $\alpha \geqslant 0$，使（见(34)）

$$\psi_p(\theta) = (\theta + \theta \psi_m(\theta))^{-1}, \qquad \theta > \alpha.$$

即

$$\theta^{-1} - \psi_p(\theta) = \psi_p(\theta) \psi_m(\theta) , \qquad \theta > \alpha.$$

由拉氏反变换即得(53)．　#

方程(53)称为 Volterra 方程.

# §2　收敛性

## 6. 在 $\mathscr{P}$ 中的收敛性

在 $\mathscr{P}$ 上我们引进下述三类收敛性的概念.

U-收敛　设($p_n\in\mathscr{P}$, $n\in N$)是 $\mathscr{P}$ 中一序列，又设 $p\in\mathscr{P}$，如果在 $\overline{R}$ 上一致地有

$$\lim_{n\to\infty} p_n(t)=p(t)\,,\qquad t\in\overline{R}\,.$$

则称($p_n$, $n\in N$)一致收敛于 $p$，记作

$$p_n\xrightarrow{\mathrm{U}}p. \tag{1}$$

C-收敛　设($p_n\in\mathscr{P}$, $n\in N$)及 $p\in\mathscr{P}$，如果在 $\overline{R}$ 的任意紧子集 $K$ 上一致地成立

$$\lim_{n\to\infty} p_n(t)=p(t)\,,\qquad t\in K.$$

则称($p_n$, $n\in N$) C-收敛于 $p$. 记作

$$p_n\xrightarrow{\mathrm{C}}p. \tag{2}$$

T-收敛　如果($p_n\in\mathscr{P}$, $n\in N$)及 $p\in\mathscr{P}$ 且

$$\lim_{n\to\infty} p_n(t)=p(t)\,,\qquad t\in\overline{R}\,.$$

则称($p_n$, $n\in N$)逐点收敛于 $p$，记作

$$p_n\xrightarrow{\mathrm{T}}p. \tag{3}$$

上述三种收敛性，以 U-收敛最强，T-收敛最弱，即如果($p_n\in\mathscr{P}$, $n\in N$)及 $p\in\mathscr{P}$ 则有

$$p_n\xrightarrow{\mathrm{U}}p\Rightarrow p_n\xrightarrow{\mathrm{C}}p\Rightarrow p_n\xrightarrow{\mathrm{T}}p. \tag{4}$$

## 7. 例

令

$$p_n(t) = e^{-t/n}, \quad n \in N, \quad p(t) \equiv 1, \quad t \in \overline{R}.$$

若以 $\mu_n$ 记 $(0,\infty]$ 上的测度，它满足

$$\mu_n(\{\infty\}) = \frac{1}{n}, \mu_n((0,\infty)) = 0, \qquad n \in N.$$

则 $\mu_n \in \Lambda$ $(n \in N)$，且

$$\psi_{p_n}(\theta) = \frac{1}{\theta + \frac{1}{n}} = \left(\theta + \int_{(0,\infty]}(1 - e^{-\theta x})\mu_n(dx)\right)^{-1},$$

$$\theta > 0.$$

从而 $p_n \in \mathscr{P}(n \in N)$，显然有

$$p_n \xrightarrow{T} p \text{ 及 } p_n \xrightarrow{C} p.$$

但 $p_n \xrightarrow{U} p$ 不成立.

稍后我们将证明在 $\mathscr{P}$ 中 C-收敛与 T-收敛等价.

## 8. 弱收敛与 T 收敛的定义

我们再补充一些方便以后叙述的记号.

在定理 I 中，我们建立了 $\mathscr{P}$ 与 $\Lambda$ 之间的一一对应关系，但当 $\mu=0$，即 $\mu$ 是 $(0,\infty]$ 上的零测度时，它对应的标准 $p$-函数是：$p_0(t)\equiv 1(t \in \overline{R})$）. 对于这个平凡的标准 $p$-函数，今后在叙述和证明某些结论时，往往需要排除它，所以，当需要排除上述平凡情形时，我们以 $\Lambda-\{0\}$ 表示 $\Lambda$ 中全体非零测度集. 而以 $\mathscr{P}-\{p_0\}$ 表示全体不恒为 1 的标准 $p$-函数.

以 $\Lambda_F$ 记 $(0,\infty]$ 上全体有限测度集，以 $\Lambda_F-\{0\}$ 记 $\Lambda_F$ 中全体

非零测度集. 以 $\Lambda_I$ 记 $(0,\infty]$ 上全体概率测度集. 因此

(5) $$\Lambda_I \subset \Lambda_F - \{0\} \subset \Lambda - \{0\}.$$

当 $\mu \in \Lambda$ 时, 若令

(6) $$L(A) = \int_A (1 - e^{-x})\, \mu(dx), \qquad A \in \mathscr{B}(0,\infty].$$

则 $L \in \Lambda_F$, 反之, 若 $L \in \Lambda_F$. 令

(7) $$\mu(A) = \int_A \frac{1}{1 - e^{-x}} L(dx), \qquad A \in \mathscr{B}(0,\infty].$$

则 $\mu \in \Lambda$. (6)与(7)建立了 $\Lambda$ 与 $\Lambda_F$ 之间的对应关系.

其次, 如 $L \in \Lambda_F - \{0\}$, 令

(8) $$\lambda(A) = \frac{1}{L((0,\infty])} L(A), \qquad A \in \mathscr{B}(0,\infty].$$

则 $\lambda \in \Lambda_I$. 反之, 如 $\lambda \in \Lambda_I$, 则对任意 $q, 0 \leqslant q < \infty, L = q\lambda \in \Lambda_F$.

现在叙述测度集的两种收敛性定义.

以 $C(0,\infty]$ 记 $(0,\infty]$ 上全体有界连续函数集. 设 $(L_n \in \Lambda_F, n \in N)$ 是 $\Lambda_F$ 中的序列及 $L \in \Lambda_F$. 如果成立.

(9) $$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,\infty]} f(x) L_n(dx) = \int_{(0,\infty]} f(x) L(dx), \quad f \in C(0,\infty].$$

则称 $(L_n, n \in N)$ 弱收敛于 $L$. 记作

(10) $$L_n \Rightarrow L.$$

通过关系(6)与(7), 可以自然地引出 $\Lambda$ 上的一种收敛性定义.

设 $(\mu_n \in \Lambda, n \in N)$ 是 $\Lambda$ 中的序列及 $\mu \in \Lambda$. 令

(11) $$L_n(A) = \int_A (1 - e^{-x}) \mu_n(dx), \quad L(A) = \int (1 - e^{-x}) \mu(dx),$$
$$A \in \mathscr{B}(0,\infty], n \in N.$$

如果 $L_n \Rightarrow L$, 则称 $\mu_n$T-收敛于 $\mu$. 记作

(12) $$\mu_n \overset{\mathrm{T}}{\Rightarrow} \mu.$$

## 9. 基本收敛定理

下述定理建立 $\mathscr{P}$ 中的 T-收敛与 $\Lambda$ 中的 T-收敛之间的对应关系.

**定理 Ⅲ**

设 $p_n \in \mathscr{P}$，$p_n \sim \mu_n \in \Lambda(n \in N)$．又设 $p \in \mathscr{P}$．$p \sim \mu \in \Lambda$．则

(13) $$p_n \xrightarrow{\mathrm{T}} p.$$

当且仅当

(14) $$\mu_n \xrightarrow{[} \mu.$$

**证**：必要性，假定 $p_n \xrightarrow{\mathrm{T}} p$．则由控制收敛定理必有

(15) $$\lim_{n\to\infty} \psi_{p_n}(\theta) = \psi_p(\theta)\ , \qquad \theta > 0.$$

由定理 Ⅰ 和(15)式得

(16) $$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,\infty]} (1 - e^{-\theta x})\ \mu_n(dx) = \int_{(0,\infty]} (1 - e^{-\theta x})\ \mu(dx)\ ,\qquad \theta > 0.$$

现设 $k \in N$ 及 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k > 0$ 和任意实数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$，令

(17) $$f(x) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \theta_i, & x = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \dfrac{1 - e^{-\theta_i x}}{1 - e^{-x}}, & 1 < x < \infty, \\ \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i, & x = \infty. \end{cases}$$

则 $f \in C[0,\infty]$，由(16)式即得

(18)
$$\lim_{n\to\infty}\int_{(0,\infty]} f(x)\ (1-e^{-x})\ \mu_n(dx) = \int_{(0,\infty]} f(x)\ (1-e^{-x})\ \mu(dx)\ .$$

若命

(19) $L_n(x)=\int_A (1-e^{-x})\ \mu_n(dx)$, $L(A)=\int_A (1-e^{-x})\ \mu(dx)$,

$A\in\mathscr{B}(0,\infty]$.

则(18)式可以写成

(20)
$$\lim_{n\to\infty}\int_{(0,\infty]} f(x)\ L_n(dx) = \int_{(0,\infty]} f(x)L(dx)\ .$$

其中 $f$ 有形式(17).特别取 $f$ 为如下的函数

$$f(x)=\frac{e^{-(\theta+1)x}}{1-e^{-x}}-\frac{e^{-\theta x}}{1-e^{-x}}=e^{-\theta x},\qquad 0<x<\infty,$$

并命 $f(0)=1$，$f(\infty)=0$，则由(20)得

(21)
$$\lim_{n\to\infty}\int_{(0,\infty]} e^{-\theta x}L_n(dx) = \int_{(0,\infty]} e^{-\theta x}L(dx)\ .\qquad \theta>0.$$

由于对任意 $f\in C[0,\infty]$，都可以用形如

$$a+\sum_{i=1}^{k}a_i e^{-\theta_i x},\quad a_i\in R,\theta_i>0,\ i=1,\cdots,k,\ k\in N.$$

的函数一致逼近，从而由(21)得

$$L_n \Longrightarrow L.$$

由定义，$\mu_n\overset{T}{\Rightarrow}\mu$.

现证充分性，假定 $\mu_n\overset{T}{\Rightarrow}\mu$. 由(19)定义 $L_n(n\in N)$和 $L$，则($L_n$((0,∞]), $n\in N$) 有界. 即存在 $H<\infty$使

(22)
$$L_n((0,\infty])<H\ ,\qquad n\in N\ .$$

由 Volterra 方程得

$$0 \leqslant 1 - p_n(t) = \int_0^t p_n(t-s) m_n(s) ds$$

$$\leqslant \int_0^t ds \int_{(s,\infty]} \mu_n(dx)$$

$$\leqslant \int_{(0,\infty]} \frac{\min(x,t)}{1-e^{-x}} L_n(dx), \qquad n \in N.$$

其中 $m_n(s) = \mu_n((s,\infty]))$.

因此，对任意 $\delta > 0$，当 $0 \leqslant t \leqslant \delta$ 时有

$$1 - p_n(t) \leqslant U_n + V_n, \qquad n \in N. \tag{23}$$

其中

$$U_n = \int_{(0,\delta]} \frac{x}{1-e^{-x}} L_n(dx), \qquad n \in N \tag{24}$$

$$V_n = t \int_{(\delta,\infty]} \frac{1}{1-e^{-x}} L_n(x), \qquad n \in N. \tag{25}$$

同理有

$$1 - p(t) \leqslant U + V, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \delta. \tag{26}$$

其中

$$U = \int_{(0,\delta]} \frac{x}{1-e^{-x}} L(dx). \tag{27}$$

$$V = \int_{(\delta,\infty]} \frac{1}{1-e^{-x}} L(dx). \tag{28}$$

现设 $\varepsilon > 0$ 是预先给定的任意正数.

由于 $L$ 是有限测度而 $f(x) = x/(1-e^{-x})$ ($f(0)=1$) 是 $[0,1]$ 上的有界连续函数，所以我们可以取 $\delta$ 满足条件：$0 < \delta < 1$，$L(\{\delta\}) = 0$ 且

$$U = \int_{(0,\delta]} \frac{x}{1-e^{-x}} L(dx) < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{29}$$

在下面的讨论中，我们一直固定满足上述条件的 $\delta$. 由于

$L_n \Rightarrow L$ 且 $L(\{\delta\})=0$，从而

(30) $$\lim_{n\to\infty} U_n = U .$$

于是可以取充分大的 $l=l(\varepsilon)$ 使当 $n>l(\varepsilon)$ 时

(31) $$U_n < \varepsilon/2 , \qquad n \in N , n > l(\varepsilon).$$

于是从(23),(25),(22)及(31)得

$$1 - p_n(t) \leqslant \frac{3}{4}\varepsilon + tV_n \leqslant \frac{3}{4}\varepsilon + \frac{tH}{1-e^{-\delta}},$$

$$n > l(\varepsilon) , \ 0 \leqslant t \leqslant \delta.$$

从而对一切 $n\in N$ 有

(32) $$1 - p_n(t) \leqslant \frac{3}{4}\varepsilon + \frac{tH}{1-e^{-\delta}} + \max_{1\leqslant k\leqslant l(\varepsilon)} (1 - p_k(t)),$$

$$0 \leqslant t \leqslant \delta.$$

其次，由第二章定理Ⅲ有

$$|p_n(t+h) - p_n(t)| \leqslant 1 - p_n(|h|), \qquad t, t+h \in \overline{R} , n \in N .$$

从而有

(33) $$|p_n(t+h) - p_n(t)| \leqslant \frac{3}{4}\varepsilon + \frac{|h|}{1-e^{-\delta}}H$$

$$+ \max_{1\leqslant k\leqslant l(\varepsilon)} (1 - p_k(|h|)), \qquad |h| \leqslant \frac{\delta}{2}, n \in N .$$

现在我们只要选取充分小的 $\bar\delta\leqslant\delta/2$ (注意，从(29)式以后，我们的讨论一直是将 $\delta$ 固定的) 使

(34) $$\frac{|h|}{1-e^{-\delta}}H + \max_{1\leqslant k\leqslant l(\varepsilon)} (1 - p_k(|h|)) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |h| \leqslant \bar\delta .$$

从而由(33)，我们得

(35) $$|p_n(t+h) - p_n(t)| \leqslant \varepsilon,$$

$$n \in N, \ t, \ t+h \in R, |h| \leqslant \bar\delta .$$

由(35)可见$(p_n, n\in N)$在$[0,\infty]$均匀一致连续.

现设 $Q$ 是 $(0,\infty)$ 上全体有理数集. 选取 $(p_n, n\in N)$ 的子列 $(p_{n_k}, k\in N)$ 使

$$\lim_{k\to\infty} p_{n_k}(t) = p^*(t), \qquad t\in Q.$$

其中极限函数 $p^*$ 虽然只在 $Q$ 上有定义，但由均匀一致连续性，容易将 $p^*$ 扩张到 $[0,\infty]$ 上使

$$\lim_{k\to\infty} p_{n_k}(t) = p^*(t), \qquad t\in \bar{R}.$$

由第二章 § 1的引理知，$p^*$ 是 $p$-函数. 由均匀一致连续性知，$p^*\in\mathscr{P}$. 设 $p^*\sim\mu^*\in\Lambda$.

因为 $p_{n_k}\sim\mu_{n_k}(k\in N)$. 由已经证明了的本定理的必要部分得出 $\mu_{n_k}\overset{T}{\Rightarrow}\mu^*$. 因此 $\mu^*=\mu$，$p^*=p$. 从上面的证明表明，$(p_n, n\in N)$ 的任意子列均可抽出子列 T 收敛于 $p$，于是 $p_n\overset{T}{\Rightarrow}p$. #

**定理** Ⅳ

设 $(p_n\in\mathscr{P}, n\in N)$ 是 $\mathscr{P}$ 中序列，$p\in\mathscr{P}$ 且 $p_n\overset{T}{\Rightarrow}p$，则

A. $(p_n, n\in N)$ 均匀一致连续；

B. $p_n\overset{C}{\Rightarrow}p$；

C. 如果 $t_n\to t$ $(t_n, t\in R)$，则 $p_n(t_n)\to p(t)$（当 $n\to\infty$）.

**证**：定理 Ⅲ 的充分性部分的证明中已经给出了 A 的证明. B 和 C 是 A 的直接推论. #

本定理的 B 表明，在 $\mathscr{P}$ 中，T-收敛等价于 C-收敛.

## 10. $-p'(0)$ 与典型测度的关系

在第二章定理 Ⅲ 已经证明，对 $p\in\mathscr{P}$

$$-p'(0)=q=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(1-p(t))$$

存在，且$0\leqslant q\leqslant\infty$．下述定理将 $-p'(0)$ 的值用典型测度表示出来.

**定理** V

设 $p\in\mathscr{P}$, $p\sim\mu\in\Lambda$,则

$$-p'(0)=\mu((0,\infty]) . \tag{36}$$

**证**：由 Volterra 方程得

$$\begin{aligned}-p'(0)&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(1-p(t))\\&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t p(t-s)m(s)ds\\&=m(0)=\mu((0,\infty]).\end{aligned}$$

#

## 11. $p(\infty)$与典型测度的关系

对任意 $p\in\mathscr{P}$ ,由第二章定理 IV 知，$p(\infty)$一定存在．然而，如果知道了 $p$ 的典型测度，它的值可以计算出来.

**定理** VI

设 $p\in\mathscr{P}$, $p\sim\mu\in\Lambda$,则

$$p(\infty)=\left(1+\int_{(0,\infty]}x\mu(dx)\right)^{-1} \tag{37}$$

**证**：由 Volterra 方程得

$$\psi_p(\theta)-\frac{1}{\theta}-\psi_p(\theta)\psi_m(\theta)\ ,\qquad \theta>0\ .$$

即

$$\theta\psi_p(\theta) = (1 + \psi_m(\theta))^{-1}, \qquad \theta > 0. \tag{38}$$

注意，§1 (34)式得(38)，但那是当 $\psi_m(\theta)<1$ 的情形下获得的，由 Volterra 方程得知(38)对一切 $\theta>0$ 成立.

现由控制收敛定理得

$$\begin{aligned} p(\infty) &= p(\infty)\int_0^\infty e^{-\tau}d\tau \\ &= \lim_{\theta\to 0}\int_0^\infty p\left(\frac{\tau}{\theta}\right)e^{-\tau}d\tau = \lim_{\theta\to 0}\theta\psi_p(\theta) \end{aligned} \tag{39}$$

由(38)，(39)即得(37).　#

# §3　离散骨架方法

## 12. 典型测度与 $F$ 序列的关系

设 $p\in\mathscr{P}$，对任意固定的 $h>0$，我们已经引进过 $p$ 的离散骨架

$$u^{(h)} = (p(nh), n\in\overline{N})\ ). \tag{1}$$

并且有 $u^{(h)}\in\mathscr{R}$. 记 $u^{(h)}$对应的 $F$ 序列是

$$f = (f_n(h)\ ,\ n\in N)\ . \tag{2}$$

现设 $\mu\in\Lambda$ 且 $p\sim\mu$，人们自然会问：典型测度 $\mu$ 与上述的 $F$ 序列有什么关系？

下面的定理回答了这个问题.

**定理Ⅶ**

设 $p\in\mathscr{P}$，$\mu\in\Lambda$，$p\sim\mu$. 对任意 $h>0$，$u^{(h)}=(p(nh),n\in\overline{N})$. 又设 $f=(f_n(h)\ ,n\in N)$是 $u^{(h)}$对应的 $F$ 序列，则对任意 $0<a<b$

$<\infty$ ，且 $a,b$ 不是 $\mu$ 的原子(即 $\mu(\{a\})=\mu(\{b\})=0$) 时 ，有

(3) $$\mu(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sum_{a<nh<b}f_n(h).$$

**证**：设 $0<z<1$ ，由于

$$p(nh)=\sum_{k=1}^{n}f_k(h)\,p((n-k)h),\qquad n\in N.$$

以 $U(z)$ $(0\leqslant z<1)$ 记序列 $(p(nh),n\in N)$ 的母函数，则

(4) $$U(z)=\sum_{n=0}^{\infty}p(nh)z^n=\Big(1-\sum_{n=1}^{\infty}f_n(h)z^n\Big)^{-1}$$
$$=\Big(\sum_{1\leqslant n\leqslant\infty}f_n(h)(1-z^n)\Big)^{-1}$$

其中令 $f_\infty(h)=1-\sum_{k=1}^{\infty}f_k(h)$, $z^\infty=0$.

固定 $\theta>0$ ，取 $z=e^{-\theta h}$，则由控制收敛定理

(5) $$\psi_p(\theta)=\int_0^\infty p(t)e^{-\theta t}dt$$
$$=\lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}p(kh)\int_{kh}^{(k+1)h}e^{-\theta t}dt$$
$$=\lim_{h\to 0}h\sum_{k=0}^{\infty}p(kh)e^{-\theta kh}$$
$$=\lim_{h\to 0}h\Big(\sum_{0\leqslant k\leqslant\infty}p_k(h)(1-e^{-\theta kh})\Big)^{-1}$$

现令 $L_h$ 是 $[0,\infty]$ 上的测度 ，它取值于 $(nh,n\in N\cup\{\infty\})$ 上且满足

(6) $$L_h(nh)=h^{-1}f_n(h)(1-e^{-nh}),\qquad 1\leqslant n\leqslant\infty.$$

于是我们有

(7) $$\psi_p(\theta)=\lim_{h\to 0}\Big(\int_{(0,\infty]}\frac{1-e^{-\theta x}}{1-e^{-x}}L_h(dx)\Big)^{-1},\qquad \theta>0.$$

令 $\theta=1$，则 $\psi_r(1)>0$ 且

(8) $$\psi_r(1)^{-1}=\lim_{h\to 0} L_h([0,\infty])\ ,$$

从而 $L_h([0,\infty])$ $(h>0)$ 是有界的，于是存在子列 $(L_{h_k},k\in N)$ 使 $h_k\to 0$（当 $k\to\infty$）和 $[0,\infty]$ 上的有限测度 $L$，使

$$L_{h_k}\to L.$$

于是由(7)得

(9) $$\psi_r(\theta)=\left(\int_{[0,\infty]}\frac{1-e^{-\theta x}}{1-e^{-x}}L(dx)\right)^{-1}$$
$$=\left(L(\{0\})\theta+\int_{(0,\infty]}\frac{1-e^{-\theta x}}{1-e^{-x}}L(dx)\right)^{-1},\qquad \theta>0.$$

然而由定理 I 有

(10) $$\psi_r(\theta)=\left(\theta+\int_{(0,\infty]}(1-e^{-\theta x})\mu(dx)\right)^{-1}$$
$$=\left(\theta+\int_{(0,\infty]}\frac{1-e^{-\theta x}}{1-e^{-x}}(1-e^{-\theta x})\mu(dx)\right)^{-1},\ \theta>0.$$

由拉氏变换的唯一性，比较(9)与(10)得

(11) $$L(\{0\})=1$$

和

(12) $$L(A)=\int_A(1-e^{-x})\mu(dx),\qquad A\in\mathscr{B}(0,\infty].$$

如果又有子列 $(\tilde{h}_k,k\in N)$，$\tilde{h}_k\to 0(k\to\infty)$，使

$$L_{\tilde{h}_k}=>\tilde{L}$$

则由(12)得 $\tilde{L}=L$. 从而由(6)和(12)以及 $\mu(\{a\})=\mu(\{b\})=0$ 得

(13) $$\mu(a,b)=\int_a^b\frac{1}{1-e^{-x}}L(dx)$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sum_{a<nh<b}f_n(h).\qquad\#$$

**推论 1**

设 $p$ 是$[0,\infty)$上的连续函数．如果对任意 $h>0$，$(p(nh),n\in\overline{N})\in\mathscr{R}$，则 $p\in\mathscr{P}$.

**证**：设$(p(nh),n\in\overline{N})$ 对应的 $F$ 序列是$(f_n(h),n\in N)$. 令

$$L_h(\{nh\})=h^{-1}f_n(h)(1-e^{-nh}),\qquad 1\leqslant n\leqslant\infty .$$

然后与定理Ⅶ的证明一样地建立(5)～(9)式，再以(12)定义$(0,\infty]$上的测度 $\mu$. 则有

$$\psi_p(\theta)=\left(\theta+\int_{(0,\infty]}(1-e^{-\theta x})\mu(dx)\right)^{-1},\qquad \theta>0 .$$

由定理Ⅰ，$p\in\mathscr{P}$. #

**推论 2**

设 $p_1,p_2\in\mathscr{P}$，$\mu_1,\mu_2\in\Lambda$，$p_1\sim\mu_1$，$p_2\sim\mu_2$. 又设 $T>0$，则

$$p_1(t)=p_2(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{14}$$

的充要条件是

$$\mu_1((a,b))=\mu_2((a,b)),\qquad 0<a<b\leqslant T. \tag{15}$$

且

$$\mu_1([T,\infty])=\mu_2([T,\infty]). \tag{16}$$

**证**：假定(15)，(16) 成立，于是对任意 $0<t<T$，$m_1(t)=\mu_1((t,\infty])=\mu_2((t,\infty])=m_2(t)$．从而由§1的(33) 得 $p_1(t)=p_2(t)$. 由于 $p_1$ 与 $p_2$ 连续，故 $p_1(T)=p_2(T)$.

反之，如果(14) 成立，则 $p_1$ 与 $p_2$ 的离散骨架

$$u^{(1h)}=(p_1(nh),n\in\overline{N}),\quad u^{(2h)}=(p_2(nh),n\in\overline{N})$$

在$(0,T]$内相等，即

$$p_1(nh)=p_2(nh)\ ,\qquad 0<nh\leqslant T.$$

设$(f_{1n}(h),n\in N)$与$(f_{2n}(h),n\in N)$分别是$p_1,p_2$所对应的$F$序列，则

$$f_{1n}(h)=f_{2n}(h),\qquad 0<nh\leqslant T.$$

于是由定理Ⅶ，如果$0<a<b\leqslant T$，且$a,b$不是$\mu_1$与$\mu_2$的原子．有

$$\mu_1((a,b))-\mu_2((a,b))\ .$$

但$\mu_1,\mu_2$的原子集至多可列，从而(15)成立．

又因$p_1,p_2$在$[0,T]$内相等，故$-p_1'(0)=-p_2'(0)$．从而由定理Ⅴ，$\mu_1((0,\infty])=\mu_2((0,\infty])$．因此由已经证明了的(14)得

$$\begin{aligned}\mu_1((T,\infty])&=\mu_1((0,\infty])-\mu_1((0,T))\\&=\mu_2((0,\infty])-\mu_2((0,T))-\mu_2((T,\infty])\ .\end{aligned}$$ #

# §4　右导数与左导数

## 13. 有关卷积的几个引理

本节的目的是研究标准$p$-函数的导数问题．人们熟知，对于$p\in\mathscr{P}_M$，即$p$是某个马氏链的对角线元时，$p$在$(0,\infty)$的一阶导数存在．然而，由于$\mathscr{P}_M\subset\mathscr{P}$且$\mathscr{P}_M\neq\mathscr{P}$(这一点尚未证明)，自然就提出这样的问题，当$p\in\mathscr{P}\backslash\mathscr{P}_M$时，$p$的一阶导数是否仍存在？答案是否定的．由于答案是否定的，我们就间接地证明了$\mathscr{P}\neq\mathscr{P}_M$.

我们首先证明几个引理．

**引理 A**

设 $\mu\in\Lambda$, $m(t)=\mu((t,\infty])$，以 $m^{(n)}(t)$ 记 $m$ 的 $n$ 次卷积. 则对 $n\geqslant 2$，$m^{(n)}(t)$ 在 $(0,\infty)$ 连续.

**证：** 在§1 引理 B 已经证明 $\sum_{n=1}^{\infty} m^{(n)}(t)$ 在 $(0,\infty)$ 几乎处处收敛. 从而 $m^{(n)}(t)$ 几乎处处有限. 由定义

$$(1)\qquad m^{(n)}(t)=\int_{s_1+\cdots+s_n=t} m(s_1)\cdots m(s_n)ds_1\cdots ds_n$$

现在固定 $t>0$. 以 $L_{n-1}$ 记 $R^n$ 的下述子集的 $n-1$ 维 Lebesgue 测度：

$$U_n=\left\{y=(y_1,\cdots,y_n)\in R^n,\ y_j\geqslant 0,\ 1\leqslant j\leqslant n,\ \sum_j^n y_j=1\right\}$$

则(1)可写成

$$(2)\qquad m^{(n)}(t)=t^{n-1}\int_{U_n} m(ty_1)\cdots m(ty_n)L_{n-1}(dy)$$

因为 $m(t)$ 在 $(0,\infty)$ 全多可列个不连续点，从而 $m^{(n)}(t)$ $(n\geqslant 2)$ 必在 $(0,\infty)$ 连续. #

**引理 B**

设 $\mu\in\Lambda$, $m(t)=\mu((t,\infty])$, $m^{(n)}(t)$ 是 $m$ 的 $n$ 次卷积，则

$$(3)\qquad m^{(n)}(t)\leqslant nm\left(\frac{t}{n}\right)\int_0^t m^{(n-1)}(s)ds,\qquad t>0, n\geqslant 2.$$

**证：** 借助引理 A 中的表达式(2)，现令

$$U_{nk}=\left(y\in U_n;\ y_k=\max_{1\leqslant j\leqslant n} y_j\right),\qquad 1\leqslant k\leqslant n.$$

则

$$U_n = \bigcup_{k=1}^{n} U_{nk}.$$

虽然当 $k \neq l$ 时，$U_{nk}$与 $U_{nl}$可能相交. 但是由于 $m(t)$最多有可列个不连续点，故

$$L_{n-1}(U_{nl} \cap U_{nk}) = 0, \quad l \neq k, 1 \leqslant l,k \leqslant n.$$

因此

$$m^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^{n} t^{n-1} \int_{U_{nk}} m(ty_1)\cdots m(ty_n) L_{n-1}(dy)$$

$$= nt^{n-1} \int_{U_{nn}} m(ty_1)\cdots m(ty_n) L_{n-1}(dy)$$

上式最后的等号用到明显的对称性质，而在 $U_{nn}$上，$y_n \geqslant \frac{1}{n}$. 由于 $m$ 是不增函数，故

$$m^{(n)}(t) \leqslant nt^{n-1} m\left(\frac{t}{n}\right) \int_{U_{nn}} m(ty_1)\cdots m(ty_{n-1}) L_{n-1}(dy)$$

$$\leqslant nt^{n-1} m\left(\frac{t}{n}\right) \int_{U_n} m(ty_1)\cdots m(ty_{n-1}) L_{n-1}(dy)$$

作变换

$$s = t(y_1 + \cdots + y_{n-1}), \quad z_j = ty_j/s, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1.$$

则有

$$m^{(n)}(t) \leqslant nt^{n-1} m\left(\frac{t}{n}\right) \int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{n-1} ds \int_{U_{n-1}} m(sz_1)\cdots m(sz_{n-1}) L_{n-1}(dz)$$

$$= n\, m\left(\frac{t}{n}\right) \int_0^t m^{n-1}(s) ds. \qquad \#$$

## 引理 C

设 $\mu \in \Lambda$, $m(t) = \mu((t,\infty])$, $m^{(n)}$是 $m$ 的 $n$ 次卷积，则

(4) $$b_1(t)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}m^{(n)}(t)$$

是 $t$ 在 $(0,\infty)$ 上的连续函数.

证:由引理 A 已知 $m^{(n)}(t)(n\geqslant 2)$ 是 $t$ 在 $(0,\infty)$ 上的连续函数,因此只须证明 $\sum_{n=2}^{\infty}m^{(n)}(t)$ 在任何固定的有限区间 $[a,b]$ $(0<a<b<\infty)$ 上一致收敛即可.

由引理 B

$$m^{(n)}(t)\leqslant n\ m\left(\frac{t}{n}\right)\int_0^t m^{(n-1)}(s)ds\ ,\qquad t>0.$$

因此,当 $\theta>0$

$$m^{(n)}(t)\leqslant n\ m\left(\frac{t}{n}\right)\int_0^t e^{\theta(t-s)}m^{(n-1)}(s)ds$$

$$\leqslant n\ m\left(\frac{t}{n}\right)e^{\theta t}(\psi_m(\theta))^{n-1}\qquad t>0.$$

现设 $t\in[a,b]$, $0<\delta<1$, 选取 $\theta>0$ 使

$$\psi_m(\theta)<\frac{\delta}{2}.$$

于是

$$m^{(n)}(t)\leqslant n\ m\left(\frac{a}{n}\right)e^{\theta b}\frac{\delta^{n-1}}{2^{n-1}}<K\delta^{n-1}.$$

其中 $K$ 是一个只依赖 $a,b$ 的常数,与 $n$ 无关. 从而

$$\sum_{n=2}^{\infty}m^{(n)}(t)\leqslant K\sum_{n=2}^{\infty}\delta^{n-1}.$$

即 $\sum_{n=2}^{\infty}m^{(n)}(t)$ 在 $[a,b]$ 内一致收敛,从而连续. 因此 $b_1(\cdot)$ 在 $(0,\infty)$ 连续. #

## 14. 标准 $p$-函数的导数

前已指出，当 $p\in\mathscr{P}$，$p$ 的一阶导数未必存在. 但是下述定理将指出，$p$ 的左导数和右导数存在. 而且它们之间的关系可以通过 $p$ 的典型测度表示出来.

**定理Ⅷ**

*设 $p\in\mathscr{P}$，$\mu\in\Lambda$ 且 $p\sim\mu$. 则 $p$ 在 $(0,\infty)$ 上存在左导数与右导数，分别记作 $D_-p$ 与 $D_+p$，且*

(5) $$D_+p(t)-D_-p(t)=\mu(\{t\}),\qquad 0<t<\infty.$$

*又设 $m(t)=\mu((t,\infty])(t>0)$，$m^{(n)}(\cdot)$ 是 $m$ 的 $n$ 次卷积 $(n\in N)$，则*

(6) $$D_+p(t)=-m(t)+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n m^{(n)}(t),\qquad t>0.$$

**证**：令

(7) $$b(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}m^{(n)}(t),\qquad t>0.$$

(8) $$b_1(t)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}m^{(n)}(t),\qquad t>0.$$

故 $b(t)=m(t)+b_1(t)$. 由引理C，$b_1(t)$连续. 从而

(9) $$b(t+)-b(t-)=m(t+)-m(t-)=-\mu(\{t\}),\qquad t>0.$$

又由§1引理B的证明得

(10) $$p(t)=1-\int_0^t b(s)ds=1-\int_0^t m(s)ds-\int_0^t b_1(s)ds,\qquad t\in R,$$

故得

(11) $D_+ p(t) - D_- p(t) = -(b(t+) - b(t-)) = \mu(\{t\})$.

由(10)易得(6).　　#

由上述定理我们得出两个简单结论：

1. 对任意 $p\in\mathscr{P}$, $D_+p(t)\geqslant D_-p(t)$, $t\in R$.

2. 对 $p\in\mathscr{P}$,则 $p'(t)$ $(t\in R)$ 存在的充要条件是 $p$ 的典型测度 $\mu$ 没有原子.

# §5　无穷可分性

## 15. 无穷可分标准 $p$-函数

设 $p\in\mathscr{P}$. 如果对任意 $h>0$, 仍有 $p^h\in\mathscr{P}$, 则称 $p$ 是无穷可分的,以 $\mathscr{P}_I$ 记 $\mathscr{P}$ 中全体无穷可分元.

**定理Ⅸ**

设 $p\in\mathscr{P}$,则 $p\in\mathscr{P}_I$ 当且仅当 $p$ 可表成形式

(1) $$p(t) = e^{-x(t)}, \qquad 0\leqslant t<\infty.$$

其中 $x(t)$ 是非负凸函数且 $x(0)=x(0+)=0$.

**证**：设 $p\in\mathscr{P}_I$. 因为 $0<p(t)\leqslant 1$, 故 $p$ 总可以写成(1)式,其中 $0\leqslant x(t)<\infty$. 现设 $\tau>0$. 考虑 $p$ 的离散骨架$(p(n\tau),n\in\overline{N})$,由于 $p\in\mathscr{P}_I$,$(p(n\tau),n\in N)$是 Kaluza 序列, 从而

(2) $$(p(n\tau))^2\leqslant p((n-1)\tau)\,p((n+1)\tau), \qquad n\in\overline{N}.$$

由于 $p$ 有形式(1), 结合(2)得

$$2x(n\tau)\geqslant x((n-1)\tau)+x((n+1)\tau), \qquad n\in\overline{N}.$$

由此立即推出

$$2x(n\tau) \geqslant x((n+k)\tau) + x((n-k)\tau)\ ,\qquad 0<k<n\ ,\quad n\in \overline{N}.$$

由于 $p$ 是一致连续的，于是

$$2x(\alpha) \geqslant x(\alpha+\beta) + x(\alpha-\beta),\qquad 0\leqslant \beta \leqslant \alpha < \infty.$$

从而 $x$ 是一非负凸函数且 $x(0+)=x(0)=0$. 反之，如果 $x$ 是非负凸函数且 $x(0+)=x(0)=0$，则 $x$ 显然在 $[0,\infty)$ 连续. 令

$$p(t) = e^{-x(t)},\qquad t\in \overline{R}. \tag{3}$$

则 $p(\cdot)$ 在 $[0,\infty)$ 连续. 现设 $\tau>0$，则 $p$ 的离散骨架 $((p(n\tau), n\in N)$ 是 Kaluza 序列，从而 $((p(n\tau), n\in \overline{N})\in \mathscr{R}$. 于是由定理Ⅶ的推论 1，$p\in \mathscr{P}$. 现设 $h>0$，则由(3)式有

$$p^h(t) = e^{-hx(t)},\qquad t\in \overline{R}.$$

如上面所证，仍有 $p^h\in \mathscr{P}$. #

上述定理仅仅给出了 $p\in \mathscr{P}_i$ 的一种形式. 其实，(1)式中的 $x(t)(t\in \overline{R})$，可以通过 $p$ 对应的一个测度完全刻划出来. 但是要实现这一目标，我们需要一些准备.

## 16. 标准 $p$-函数的 Bloomfield 不等式

在第一章定理XⅥ中我们建立了更新序列的 Bloomfield 不等式，现在我们对标准 $p$-函数建立完全类似的不等式.

**定理** X

设 $p\in \mathscr{P}$，$\mu\in \Lambda$ 且 $p\sim\mu$. 则

$$p(t)\geqslant \exp\left(-\int_{(0,\infty]}\min(t,x)\mu(dx)\right) \tag{4}$$

$$-\exp\left(-\int_0^t m(t)dt\right), \qquad t \in \overline{R}.$$

其中 $m(t)=\mu((t,\infty])$ .

证：首先注意一个事实：如果 $p\in\mathscr{P}$，且 $p(\infty)>0$ 则有

$$p(t) \geqslant \exp\left(1-\frac{1}{p(\infty)}\right), \qquad t \in \overline{R}. \tag{5}$$

事实上，当 $p(\infty)>0$ 时，我们可以将第一章定理 XVI 关于更新序列的 Bloomfield 不等式应用于序列 $(p(nh), n\in\overline{N})$ $(h>0)$，得

$$p(nh) \geqslant \exp\left(\frac{\log p(h)}{1-p(h)}\left(\frac{1}{p(\infty)}-1\right)\right), \qquad n \in \overline{N}.$$

现在固定 $t>0$，并令 $h=\frac{t}{n}$，和 $n\to\infty$ 取极限则得(5)式.

现在我们证明定理的结论，固定 $t>0$. 令

$$\tilde{\mu}(A)=\mu(A\cap(0,t))+\mu([t,\infty])\delta_t(A), \quad A\in\mathscr{B}(0,\infty].$$

其中 $\delta_t(\cdot)$ 是点 $t$ 的单点测度. 于是 $\tilde{\mu}\in\Lambda$. 而且 $\tilde{\mu}((t,\infty)]=0$ . 因此

$$\int_{(0,\infty]} x\tilde{\mu}(dx)=\int_{(0,t)} x\mu(dx)+t\mu((t,\infty)]<\infty.$$

现设 $\tilde{p}\in\mathscr{P}$ 且 $\tilde{p}\sim\tilde{\mu}$. 则由定理 VI 得

$$\tilde{p}(\infty)=\left(1+\int_{(0,\infty]} x\tilde{\mu}(dx)\right)^{-1}>0. \tag{6}$$

又由定理 VI 的推论 2

$$p(\tau)=\tilde{p}(\tau), \qquad 0\leqslant\tau\leqslant t. \tag{7}$$

然后将(5)式应用于 $\tilde{p}$ 及利用定理 VI 得

$$p(t)=\tilde{p}(t)\geqslant\exp\left(1-\frac{1}{\tilde{p}(\infty)}\right)$$

$$=\exp\left(-\int_{(0,\infty]} x\,\tilde{\mu}(dx)\right)$$

$$= \exp\left(-\int_{(0,t]} x\mu(dx) - t\mu((0,\infty])\right)$$

$$= \exp\left(-\int_{(0,\infty]} \min(t,x)\mu(dx)\right)$$

$$= \exp\left(-\int_0^t m(t)dt\right). \qquad \#$$

**推论**

设 $p\in\mathscr{P}$，$t>0$，并令

$$a = \inf(p(s)\ ;\ 0\leqslant s\leqslant t). \tag{8}$$

则

$$p(t)\leqslant 1 + a\log a. \tag{9}$$

**证**：设 $p\sim\mu\in\Lambda$，$m(t)=\mu((t,\infty])$，则由 Volterra 方程及(8)得

$$1-p(t) = \int_0^t p(t-s)m(s)ds \geqslant a\int_0^t m(s)ds. \tag{10}$$

现在选取 $\tau\in(0,t]$使 $p(\tau)=a$．则由 Bloomfield 不等式得

$$a = p(\tau) \geqslant \exp\left(-\int_0^\tau m(s)ds\right). \tag{11}$$

由(10)，(11)得

$$1-p(t)\geqslant a\int_0^t m(s)ds \geqslant a\int_0^\tau m(s)ds$$

$$\geqslant a\log\frac{1}{a}. \qquad \#$$

## 17．引理 A

设 $p_1$、$p_2\in\mathscr{P}$，$p(t)=p_1(t)p_2(t)$，$t\in\bar{R}$．又 $\mu_1,\mu_2,\mu\in\Lambda$ 且 $p_1\sim\mu_1$，$p_2\sim\mu_2$，$p\sim\mu$．令

(12)　$m_1(t) = \mu_1((t,\infty]),\ m_2(t) = \mu_2((t,\infty])$ ,

$$m(t) = \mu((t,\infty]), \qquad t \in \bar{R}.$$

则有

(13)　$$m(t) \geqslant m_1(t) + m_2(t), \qquad t \in \bar{R}.$$

证：首先假定

(14)　$$q_1 = \mu_1((0,\infty]) < \infty, \quad q_2 = \mu((0,\infty]) < \infty.$$

令

(15)　$$B_1(x) = \mu_1((0,x])/q_1,\ B_2(x) = \mu_2((0,x])/q_2, \quad x \in \bar{R}.$$

则 $B_1(x)$与 $B_2(x)$是$(0,\infty]$上的分布函数.

现设$(X_{in}, n \in N)(i=1,2)$是两个相互独立的非负随机变量列，它们有分布：

(16)　$$\mathbb{P}(X_{i,2k+1} \leqslant x) = 1 - e^{-q_i x}, \quad k = 0,1,2,\cdots, i = 1,2.$$

和

(17)　$$\mathbb{P}(X_{i,2k} \leqslant x) = B_i(x), \quad k = 1,2,\cdots, i = 1,2.$$

又令

(18)　$$S_{i,0} = 0,\ S_{i,n} = X_{i,1} + \cdots + X_{i,n}, \quad n \geqslant 1,\ i = 1,2.$$

现在定义两类再生现象$(Z_i(t), t \in \bar{R})$ $(i=1,2)$

(19)　$$Z_i(t) = \begin{cases} 1, & S_{i,2n} < t \leqslant S_{i,2n+1}, \\ 0, & S_{i,2n+1} < t \leqslant S_{i,2n+2}, \end{cases} \quad n \in \bar{N}, i = 1,2.$$

由本章§1，$(Z_i(t), t \in R)$ $(i=1,2)$ 是再生现象，它们对应的 $p$-函数是 $p_i(t)$ $(i=1,2)$，而 $p_i(i=1,2)$的典型测度是 $\mu_i$，$\mu_i((0,x]) = qB_i(x)$ $(x \in R, i=1,2)$.

现令

(20)　$$Z(t) = Z_1(t)Z_2(t), \qquad t \in R.$$

则 $(Z(t),t\in R)$ 是标准再生现象，它对应的 $p$-函数是

$$p(t)=p_1(t)p_2(t), \qquad t\in\overline{R}.$$

为了证明(13)，考虑 $(Z(t),t\in R)$ 的第一个零区间，其长度以 $V$ 记之．同样以 $V_1,V_2$ 分别记 $(Z_1(t),t\in R)$ 与 $(Z_2(t),t\in R)$ 的第一个零区间的长度．显然有

(21) $\mathbb{P}(V\leqslant t)\leqslant\mathbb{P}(S_{11}\leqslant S_{21},V_1\leqslant t)+\mathbb{P}(S_{11}>S_{21},V_2\leqslant t).$

现在计算(21)的右边，由独立性与负指数分布的性质得(参看(16)至(18))

$$\begin{aligned}(22)\qquad \mathbb{P}(S_{11}\leqslant S_{21},V_1\leqslant t)&=\mathbb{P}(S_{11}\leqslant S_{21})P(V_1\leqslant t)\\&=\mathbb{P}(X_{11}\leqslant X_{21})B_1(t)\\&=\int_0^\infty(1-e^{-q_1s})q_2e^{-q_2s}ds\,B_1(t)\\&=\frac{q_1}{q_1+q_2}B_1(t), \qquad t\in R.\end{aligned}$$

同理

(23) $\mathbb{P}(S_{21}<S_{11},V_2\leqslant t)=\dfrac{q_2}{q_1+q_2}B_2(t), \qquad t\in R.$

将(22),(23)代入(21)得

(24) $\mathbb{P}(V\leqslant t)\leqslant\dfrac{1}{q_1+q_2}(q_1B_1(t)+q_2B_2(t)), \qquad t\in R.$

由 $p(t)=p_1(t)p_2(t)$ $(t\in R)$ 得 $-p'(0)=q_1+q_2$. 因此如果 $p\sim\mu\in\Lambda$，则 $\mu((0,\infty])=q_1+q_2$. 令

(25) $$B(x)=\mu((0,x])/(q_1+q_2)$$

则 $B(x)$ 是 $(0,\infty]$ 上的分布函数．

现在我们证明 $(Z(t),t\in R)$ 仍是 $B$-型再生现象．令

$$X_1=\min(X_{11},X_{21}).$$

并取 $S_1=X_1$，然后令

$$S_2 = \inf(t: t > X_1, Z(t) = 1),$$

$$S_3 = \inf(t: t > S_2, Z(t) = 0).$$

一般地，对任意 $n \in N$ ，令

$$S_{2n} = \inf(t: t > S_{2n-1}, Z(t) = 1).$$

$$S_{2n+1} = \inf(t: t > S_{2n}, Z(t) = 0).$$

现在设

$$X_n = S_n - S_{n-1}, \qquad n = 2, 3, \cdots.$$

应用负指数分布的性质和上述定义，用初等概率论的方法就可证明：(1) $(X_n, n \in N)$是相互独立随机变量序列；(2) $(X_{2k+1}, k \in N)$是具有负指数分布的随机变量序列：

(26) $\quad \mathbb{P}(X_{2k+1} \leqslant x) = 1 - e^{-(q_1+q_2)x}, \qquad k \in \overline{N}, x \in R.$

而$(X_{2k}, k \in N)$则有分布

(27) $\quad \mathbb{P}(X_{2k} \leqslant x) = B(x), \qquad k \in N, x \in R.$

其中 $B(x)$如(25) 所定义（上述(1)，(2)的证明纯属概率论基础的范围，与本书关系不甚密切而叙述又比较烦锁，因此从略. 读者不妨作为练习证明之）. 从而$(Z(t), t \in R)$仍是 $B$ 型再生现象.

于是由(24)，(25)得

(28) $$\mathbb{P}(V \leqslant t) = B(t) \leqslant \frac{1}{q_1 + q_2}(q_1 B_1(t) + q_2 B_2(t)), \qquad t \in R.$$

从而

(29) $$(q_1 + q_2)(1 - B(t)) \geqslant q_1(1 - B_1(t)) + q_2(1 - B_2(t)), \qquad t \in R.$$

现在参考 § 1(20)的计算，有

(30) $$m(t) = (q_1 + q_2)(1 - B(t)), \qquad t \in R.$$

以及

(31) $$m_i(t) = q_i(1 - B_i(t)), \qquad t \in R,\ i = 1,2.$$

从而由(29),在条件(14)之下,(13)式得证.

如果条件(14)不成立,则令

(32) $$\mu_{i\varepsilon}(A) = \mu_i(A \cap (\varepsilon,\infty]),$$
$$A \in \mathscr{B}(0,\infty], \varepsilon > 0, i = 1,2.$$

并取 $p_{i\varepsilon} \in \mathscr{P}$ 使 $p_{i\varepsilon} \sim \mu_{i\varepsilon}(i=1,2)$. 又令

(33) $$p_\varepsilon(t) = p_{1\varepsilon}(t)p_{2\varepsilon}(t), \qquad \varepsilon > 0, t \in R.$$

并取 $\mu_\varepsilon \in \Lambda$ 使 $p_\varepsilon \sim \mu_\varepsilon$. 并记

(34) $$m_{i\varepsilon}(t) = \mu_{i\varepsilon}((t,\infty]), \qquad t \in R, i = 1,2.$$

和

(35) $$m_\varepsilon(t) = \mu_\varepsilon((t,\infty]), \qquad t \in R.$$

现由已经证明的结论得

$$m_\varepsilon(t) \geqslant m_{1\varepsilon}(t) + m_{2\varepsilon}(t), \qquad t \in R, \varepsilon > 0.$$

令 $\varepsilon \to 0$,就得(13). #

## 18. 无穷可分标准 p-函数的表示

定理 IX 已经给出了 $p \in \mathscr{P}_I$ 的一种函数表达形式,然而这一结果只是初步的.

下述定理则完整地给出了 $p \in \mathscr{P}_I$ 的一个明确表达式,它也是 Bloomfield 不等式和上述引理的直接应用.

**定理 XI**

设 $p \in \mathscr{P}$,则 $p \in \mathscr{P}_I$ 当且仅当存在 $v \in \Lambda$,使

(36)　$p(t) = \exp\left\{-\int_{(0,\infty]}\min(t,s)\nu(ds)\right\}, \qquad t \in R.$

**证**：假定 $p$ 有形式(36)，则由定理 IX 知，$p \in \mathscr{P}_I$.

现设 $p \in \mathscr{P}_I$. 又设 $\mu \in \Lambda$ 使 $p \sim \mu$. 由于 $p \in \mathscr{P}_I$，故对任意 $n \in N$，令 $p_n(t) = (p(t))^{1/n}(t \in \overline{R})$，则 $p_n \in \mathscr{P}$. 令 $\mu_n \in \Lambda$，使 $p_n \sim \mu_n$. 记

(37)　$m(t) = \mu((t,\infty])$, $m_n(t) = \mu_n((t,\infty])$, $t \in R$, $n \in N$.

则由引理 A

(38)　$$m(t) \geqslant n m_n(t), \qquad t \in R,\ n \in N.$$

另一方面，由 Bloomfield 不等式得

(39)　$p(t) = (p_n((t))^n \geqslant \exp\left(-n\int_0^t m_n(s)ds\right), \qquad t \in R.$

即有

(40)　$$n\int_0^t m_n(s)ds \geqslant -\log p(t), \qquad t \in R.$$

再由 Volterra 方程及 Bloomfield 不等式得

$$\begin{aligned}1 - p_n(t) &= \int_0^t p_n(t-s)\, m_n(s)ds \\ &\geqslant \int_0^t \exp\left(-\int_0^{t-s} m_n(\tau)d\tau\right) m_n(s)ds \\ &\geqslant \exp\left(-\int_0^t m_n(s)ds\right)\int_0^t m_n(s)ds, \qquad t \in R.\end{aligned}$$

于是

(41)　$p_n(t) \leqslant 1 - \int_0^t m_n(s)ds\, \exp\left(-\int_0^t m_n(s)ds\right), \quad t \in R.$

由(39)(41)得

(42) $$-n\log\left(1-\int_0^t m_n(s)ds\exp\left\{-\int_0^t m_n(s)ds\right\}\right)$$

$$\leqslant -\log p(t)\leqslant n\int_0^t m_n(s)ds\ ,\qquad t\in R.$$

现由(38)得

$$\int_0^t m_n(s)ds\leqslant\frac{1}{n}\int_0^t m(s)ds,\qquad t\in R$$

然而 $\int_0^t m(s)ds<\infty\ (t\in R)$. 从而当 $t>0$ 固定时,

(43) $$a_n(t):=\int_0^t m_n(s)ds\leqslant\frac{1}{n}A(t).$$

其中 $A(t)$ 与 $n$ 无关. 于是有

(44) $$\lim_{n\to\infty}a_n(t)=0.$$

现将(42)简写为

(45) $$-n\log\{1-a_n(t)e^{-a_n(t)}\}$$

$$\leqslant-\log p(t)\leqslant na_n(t)$$

由于(45)左右两边之差是

(46) $$na_n(t)+n\log(1-a_n(t)e^{-a_n(t)})$$

$$=na_n(t)(1-e^{-a_n(t)})+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n(t)$ 存在,故

(47) $$\lim_{n\to\infty}e^{-na_n(t)}=p(t)\ ,\qquad t\in R.$$

但是

(48) $$na_n(t)=n\int_0^t m_n(s)ds=n\int_0^{\infty}\mu_n((s,\infty])\ ds$$

$$=\int_{(0,\infty]}\min(t,s)\mu_n(ds)$$

于是由(47)得

(49) $$-\log p(t)=\lim_{n\to\infty}\int_{(0,\infty]}\min(t,s)n\mu_n(ds),\qquad t\in R.$$

又因

$$\int_{(0,\infty]}(1-e^{-s})n\mu_n(ds)\leqslant\int_{(0,\infty]}\min(1,s)n\mu_n(ds)$$

$$=n\int_0^1 m_n(s)ds\leqslant\int_0^1 m(s)ds$$

从而必存在$(0,\infty]$上的测度 $v$ 使

$$\int(1-e^{-s})v(ds)<\infty$$

且满足

$$-\log p(t)=\int_{(0,\infty]}\min(t,s)v(ds).\qquad\#$$

# §6 稳定的标准 $p$-函数

## 19. 定义与记号

当 $p\in\mathscr{P}$ 时，如果 $p\sim\mu\in\Lambda_F$，即 $\mu((0,\infty])<\infty$，则称 $p$ 是稳定的.

如果 $p$ 是稳定的标准 $p$-函数，则由定理 V 知

(1) $$-p'(0)-q=\mu((0,\infty])<\infty,$$

又由第二章定理 Ⅲ 知

(2) $$|p(t)-p(s)|\leqslant q|t-s|,\qquad t,s\in\overline{R}.$$

下面引进一些今后需要用到的记号.

我们以 $\mathscr{P}^*$ 记全体稳定的、但不恒等于 1 的标准 $p$-函数(虽然 $p(t)\equiv1(t\in\overline{R})$是一稳定的标准 $p$-函数，但对这个平凡的 $p$-函数

没有研究的必要，从下文将看到，如果不排除它，将会引起一些记号上的混乱）.

现令

(3) $\mathscr{P}^*(q)=\{p\in\mathscr{P}:-p'(0)=q\},0<q<\infty.$

于是从定义立即有

(4) $$\mathscr{P}^*=\bigcup_{0<q<\infty}\mathscr{P}^*(q).$$

如果 $p\in\mathscr{P}^*(q)$ 且 $p\sim\mu\in\Lambda_p$，令

(5) $$\lambda(A)=\mu(A)/q,\qquad A\in\mathscr{B}(0,\infty].$$

则 $\lambda\in\Lambda_l$，即 $\lambda$ 是 $(0,\infty]$上的分布.

由定理 I ，$\mathscr{P}^*(q)$与 $\Lambda_l$ 通过下述关系建立一一对应关系. 设 $p\in\mathscr{P}^*(q)$，则存在唯一的 $\lambda\in\Lambda_l$，使

(6) $$\psi(\theta)=\left(\theta+q\int_{(0,\infty]}(1-e^{-\theta x})\lambda(dx)\right)^{-1},\qquad\theta>0.$$

反之，如果 $\lambda\in\Lambda_l$，则存在唯一的 $p\in\mathscr{P}^*(q)$使(6)成立.

如果 $p\in\mathscr{P}^*(q)$且 $p\sim\mu\in\Lambda_p$，则 $\mu=q\lambda$. 其中 $\lambda\in\Lambda_l$，因此今后我们以 $p\sim\lambda$ 表示 $\mathscr{P}^*(q)$与 $\Lambda_l$ 之间的对应关系.

## 20. 右导数方程

下述定理是稳定的标准 $p$-函数所特有的，对于非稳定的标准 $p$-函数显然没有相应的结果.

**定理 XII**

设 $p\in\mathscr{P}^*(q)$ ，$p\sim\lambda\in\Lambda_l$，则

(7) $$D_+p(t)=-q\left(p(t)-\int_{(0,t]}p(t-s)\lambda(ds)\right),\qquad t\in R.$$

证：由定理 XIII

(8) $$D_+ p(t) = -m(t) + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n m^{(n)}(t), \qquad t > 0.$$

其中 $m(t)=q\lambda((t,\infty])$，$m^{(n)}$是 $m$ 的 $n$ 次卷积. 由 § 4 引理 C 知，$D_+p$ 在$[0,\infty]$右连续，左极限存在. 而(7)式右边的函数显然也是右连续且左极限存在的. 因此欲证(7)式，只须证明该式两边的拉氏变换相同即可.

首先，应用 Fubini 定理. (7)式右边函数的拉氏变换为：

(9) $$\begin{aligned} & -q\psi_p(\theta) + q\int_0^{\infty}\int_0^t p(t-s)\lambda(ds)e^{-\theta t}dt \\ &= -q\psi_p(\theta) + q\int_0^{\infty}\int_s^{\infty} p(t-s)e^{-\theta t}dt\lambda(ds) \\ &= -q\psi_p(\theta) + \psi_p(\theta)q\int_0^{\infty}e^{-\theta s}\lambda(ds) \\ &= -q\psi_p(\theta) + (\theta + q - \psi_p^{-1}(\theta))\psi_p(\theta) \\ &= \theta\psi_p(\theta) - 1, \qquad \theta > 0. \end{aligned}$$

上面的计算用到定理 I .

另一方面，§ 1引理 B 的证明中已经指出，存在 $\alpha\geqslant 0$，使当 $\theta>\alpha$ 时，$\psi_m(\theta)<1$. 于是当 $\theta>\alpha$ 时，由(8)式我们有

(10) $$\begin{aligned} \psi_{D_+p}(\theta) &= \int_0^{\infty} D_+ p(t)e^{-\theta t}dt \\ &= -\psi_m(\theta) + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(\psi_m(\theta))^n \\ &= -\psi_m(\theta)(1+\psi_m(\theta))^{-1}, \qquad \theta > \alpha. \end{aligned}$$

上式中的积分号与和号之所以可以交换次序，是因为$\sum\limits_{n=2}^{\infty}m^{(n)}(t)$ 在任意区间$[a,b]$$(0<a<b<\infty)$内一致收敛，现由 § 2 (38)式得

(11) $$\psi_{D_+p}(\theta) = \theta\psi_p(\theta) - 1, \qquad \theta > \alpha.$$

比较(9)和(11)就得(7). #

## 21. 右导数方程的解

下述定理给出右导数方程(7)的解的明确表达式. 这个表达式表明,稳定的 $p$-函数可以用它的典型测度的卷积明确地表示出来.

**定理 XIII**

设 $p \in \mathscr{P}^*(q)$, $p \sim \lambda \in \Lambda_l$,则

$$(12)\quad p(t) = e^{-qt} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \frac{q^n (t-s)^n}{n!} e^{-q(t-s)} \lambda^{(n)}(ds), \quad t \in R.$$

**证**: 设$(X_n, n \in N)$是相互独立随机变量序列. 它们有分布

$$(13)\quad \mathscr{P}(X_{2k+1} \leqslant x) = 1 - e^{-qx}, \qquad k \in \overline{N}.$$

和

$$(14)\quad \mathscr{P}(X_{2k} \leqslant x) = \lambda((0,x]), \qquad k \in N.$$

然后令

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + \cdots + X_n, \qquad n \in N.$$

以及

$$Z(t) = \begin{cases} 1, & S_{2n} < t \leqslant S_{2n+1}, \\ 0, & S_{2n+1} < t \leqslant S_{2n+2}, \end{cases} \qquad n \in \overline{N}.$$

则$(Z(t), t \in R)$是 B-型再生现象,而且

$$(15)\quad p(t) = \mathbb{P}(Z(t) = 1), \qquad t \in \overline{R}.$$

因此

$$(16)\quad p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_{2n} < t \leqslant S_{2n+1})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\mathbb{P}(S_{2n} < t) - \mathbb{P}(S_{2n+1} < t)\Big)$$

现在我们证明

(17)　$\mathbb{P}(S_{2n} < t) - \mathbb{P}(S_{2n+1} < t)$

$$= \int_0^t \frac{q^n(t-s)^n}{n!} e^{-q(t-s)} \lambda^{(n)}(ds), \quad t \in \overline{R},\ n \in \overline{N}.$$

事实上，当 $n=0$，我们有

(18)　$\mathbb{P}(S_0 < t) - \mathbb{P}(S_1 < t)$

$$= 1 - \mathbb{P}(X_1 < t) = 1 - (1 - e^{-qt}) = e^{-qt}.$$

现在我们对 $n \geqslant 1$ 证明(17)．为此我们以 $F(\cdot)$ 记负指数分布，即：

(19)　$$F(t) = \mathbb{P}(X_1 < t) = 1 - e^{-qt}, \qquad t \in R.$$

而以 $F^{(n)}$ 记 $F$ 的 $n$ 次卷积分布，即

(20)　$$F^{(n)}(t) = \mathbb{P}(X_1 + X_3 + \cdots + X_{2n-1} < t), \qquad t \in R.$$

下面我们首先用归纳法证明

(21)　$$F^{(n)}(t) = \int_0^t \frac{q^n s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-qs}(ds)$$

$$= 1 - e^{-qt} - \cdots - \frac{q^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-qt}, \qquad t \in R.$$

当 $n=1$ 时，(21)显然成立．现在假定(21)对某个 $n>1$ 成立，则由定义

(22)　$$F^{(n+1)}(t) = \int_0^t \int_0^\tau q\, e^{-q(\tau-s)} \frac{q^n s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-qs} ds d\tau$$

$$= \int_0^t \int_0^{t-s} q\, e^{-q\tau} d\tau \frac{q^n s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-qs} ds$$

$$= \int_0^t \big(1 - e^{-q(t-s)}\big) \frac{q^n s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-qs} ds$$

$$= F^{(n)}(t) - \frac{q^n s^n}{n!} e^{-qt}, \qquad t \in R.$$

于是(21)对 $n+1$成立.

现在可以很容易得到(17)了，因为 $S_{2n}$是 $n$ 个有分布 $F$ 和 $n$ 个有分布 $\lambda$ 的独立随机变量之和，故

$$\text{(23)} \quad \mathbb{P}(S_{2n} < t) = \int_0^t F^{(n)}(t-s)\, \lambda^{(n)}(ds), \qquad t \in R.$$

同理

$$\text{(24)} \quad \mathbb{P}(S_{2n+1} < t) = \int_0^t F^{(n+1)}(t-s)\, \lambda^{(n)}(ds), \qquad t \in R.$$

因此由(22)～(24)得(17). #

## §7 问题

问题

我们已知 $\mathscr{P}_M \subset \mathscr{P}$. 若 $p \in \mathscr{P}_M$，则 $p$ 在$(0,\infty)$上有连续导数，而由定理Ⅷ，当 $p \in \mathscr{P}$ 时，$p$ 在$(0,\infty)$仅仅存在左右导数. 从而 $\mathscr{P}_M \neq \mathscr{P}$. 因此如何刻划 $\mathscr{P}_M$ 中元素的特征就成为一个问题. Kingman 花了7年时间彻底地解决了这个问题. 他得到下面的结果.

(J. F. C. Kingman)**定理**：

*设 $p \in \mathscr{P}$, $p \sim \mu \in \Lambda$. 则 $p \in \mathscr{P}_M$ 当且仅当 $\mu$ 在$(0,\infty)$上绝对连续，且其密度函数 $f$ 满足下述条件：*

*1) $f$ 在$(0,\infty)$上下半连续；*

*2) 或者 $f(t) \equiv 0 (t \in R)$，或者 $f$ 满足*

$$f(t) > 0\ (0 < t < 1),\quad f(t) \geqslant e^{-at}(t \geqslant 1).$$

其中 $a>0$，当然它依赖于 $f$.

Kingman 定理的意义在于：它将标准马氏链(连续时间)的全部对角线元素构造了出来.

现在提出的问题是：如何刻划标准马氏链的非对角线元?

这个问题的任何进展，对于马氏链的研究都是十分有益的.

## 注释

定理Ⅰ、Ⅱ的结论是 Kingman(1963,1964) 建立的. 但是本书的证明与 Kingman 的原始证明有较大的差异. 可以说是给出了一个新的证明.

定理Ⅲ、Ⅳ 属于 Kendall(1968).

定理Ⅴ～Ⅶ 见 Kingman(1963,1964).

定理Ⅷ 见 Kingman(1965b).

定理Ⅸ和Ⅺ 见 Kendall(1968). 不过这里定理Ⅺ的证明采用了 Bloomfield 的方法. §5 引理 A 和定理 Ⅹ、Ⅺ 的证明见 Bloomfield(1971,1973).

§6 定理 Ⅻ 和 定理 ⅩⅢ 在文献上均认为是 Kingman 理论的直接推论. 本书给出较详细的证明.

问题中提到的 Kingman 定理见 Kingman(1971). 本问题也是由 Kingman(1983)提出的.

# 第四章　Kingman 不等式

## §1　$(m,M)$图问题与 Davidson 问题

### 1.　Kingman 不等式的另一记法

为了方便，我们把第二章已经叙述过的关于 Kingman 不等式的定义在此简单重述一下.

今后，恒以 $\Phi$ 记定义在 $\bar{R}$ 上取值于$[0,1]$且满足下述条件的全体连续函数：

$$p(0)=1, \qquad p\in\Phi. \tag{1}$$

现设 $p\in\Phi$ 对任意 $n\in N$ 及

$$0=t_0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_n, \tag{2}$$

令

$$\begin{aligned} F(t_1,\cdots,t_n;p) = p(t_n) &- \sum_{1\leqslant i<n} p(t_i)p(t_n-t_i) \\ &+ \sum_{1\leqslant i<j<n} p(t_i)p(t_j-t_i)p(t_n-t_j)+\cdots \\ &+(-1)^n p(t_1)p(t_2-t_1)\cdots p(t_n-t_{n-1}). \end{aligned} \tag{3}$$

注意(2)中的$(t_1,\cdots,t_n)$只是一个不减序列. 于是当 $t_n=t_{n-1}$时，由于 $p(0)=1$，故

$$F(t_1,\cdots,t_n;p)=F(t_1,\cdots,t_{n-1};p).$$

如果对任意满足(2)的$(t_1,\cdots,t_n)$都有

$$F(t_1,\cdots,t_n;p)\geqslant 0. \tag{4}$$

(5) $$\sum_{k=1}^{n} F(t_1,\cdots,t_k;p) \leqslant 1.$$

则称 $p$ 满足 $n$ 阶 Kingman 不等式.

以 $\mathscr{K}_n(n\in N)$记满足 $n$ 阶 Kingman 不等式的 $\Phi$ 中的全体元素,于是显然有

(6) $$\Phi=\mathscr{K}_1\supset\mathscr{K}_2\supset\cdots\supset\mathscr{K}_n\supset\mathscr{P}.$$

由第二章定理 I 易证

(7) $$\mathscr{K}_\infty=\lim_{n\to\infty}\mathscr{K}_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{K}_n=\mathscr{P}.$$

下面为了书写方便起见,我们引进一种简明的记法.设$p\in\Phi$,$0=t_0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_n$,记

(8) $$f(t_n)=F(t_1,\cdots,t_n;p),\quad g(t_n)=1-\sum_{k=1}^{n}f(t_k).$$

则条件(4),(5)就可写成:

(9) $$f(t_n)\geqslant 0,\qquad g(t_n)\geqslant 0.$$

并有如下递推公式:

(10) $$f(t_n)=p(t_n)-\sum_{k=1}^{n-1}f(t_k)p(t_n-t_k).$$

需要特别注意的是(8)~(9)中的 $f(t_n)$ 和 $g(t_n)$不只依赖 $t_n$,而且还依赖 $t_1,\cdots,t_{n-1}$和 $p$,只是在不致于引起混乱的情况下才使用上述记法.

## 2. $(m,M)$图问题

由(7),$\mathscr{K}_\infty=\mathscr{P}$,因此为了叙述方便,当考虑的某个问题同时涉及 $\mathscr{K}_n(n\in N)$和 $\mathscr{P}$ 时,我们将 $\mathscr{P}$ 记成 $\mathscr{K}_\infty$,例如 $\mathscr{K}_n(n\in N\cup\{\infty\})$ 表示 $\mathscr{K}_n(n\in N)$和 $\mathscr{P}$. 现设 $\mathscr{K}_n(n\in N\cup\{\infty\})$,$p(1)=M$,$0\leqslant M\leqslant 1$,令

(11) $$m(p)=\min\ (p(t):0\leqslant t\leqslant 1).$$

我们的问题是，当 $M$ 和 $n\in N\cup\{\infty\}$ 固定，令 $p$ 跑遍 $\mathscr{K}_n$，则 $m(p)$ 的取值范围如何？

为了研究上述问题，令

(12) $$I_n(M)=\inf(p(t):p\in\mathscr{K}_n,p(1)=M,0\leqslant t\leqslant 1),\quad n\in N\cup\{\infty\}.$$

显然，对任意 $p\in\mathscr{K}_n$ 我们有

(13) $$I_n(M)\leqslant m(p)=\min(p(t):0\leqslant t\leqslant 1)\leqslant M=p(1).$$

因此，我们研究的基本问题就是求 $[0,1]$上的函数

(14) $$(I_n(M):0\leqslant M\leqslant 1),\qquad n\in N\cup\{\infty\}.$$

不难从定义直接看出，我们恒有

(15) $$I_1(M)=0,\qquad 0\leqslant M\leqslant 1.$$

因此上述问题的提法只是对 $n\geqslant 2$ 才有意义. 其次从(6)易见

(16) $$0=I_1(M)\leqslant I_2(M)\leqslant\cdots,\quad 0\leqslant M\leqslant 1.$$

因此下述极限必然存在

(17) $$I_\infty^*(M)=\lim_{n\to\infty}I_n(M),\quad 0\leqslant M\leqslant 1.$$

根据第二章定理 I 容易证明

(18) $$I_\infty^*(M)=I_\infty(M)=\inf(p(t):\ p\in\mathscr{K}_\infty,\ p(1)=M,\ 0\leqslant t\leqslant 1).$$

事实上，我们的主要研究对象是 $I_\infty(M)$.

上述问题还有一种更直接的然而是等价的提法.

设 $(m,M)\in[0,1]\times[0,1]$. 如果存在 $p\in\mathscr{K}_n(n\in N\cup\{\infty\})$ 使

(19) $$p(1)=M,\quad m(p)=\inf(p(t):\ 0\leqslant t\leqslant 1)=m$$

则称 $(m,M)$ 是 $\mathscr{K}_n$ 可及点，否则称 $(m,M)$ 是 $\mathscr{K}_n$ 不可及点.

显然，如果$(m,M)$是$\mathscr{K}_n$可及点$(n\in N\cup\{\infty\})$，则$0\leqslant m\leqslant M\leqslant 1$.

下述引理是一个最初步的结果.

**引理 A**

设$n\in N\cup\{\infty\}$，$(m,M)$是$\mathscr{K}_n$可及点，如果$m\leqslant M'\leqslant M$，则$(m,M')$也是$\mathscr{K}_n$可及点.

**证**：由于$(m,M)$是$\mathscr{K}_n$可及点，于是存在$p\in\mathscr{K}_n$，使

$$p(1)=M,\quad m=\inf\ (p(t);0\leqslant t\leqslant 1)$$

不失一般性可设$m<1$，由于$p$连续，从而存在$0<\tau\leqslant 1$使$p(\tau)=m$及$\tau\leqslant s\leqslant 1$使$p(s)=M'$. 现令

$$\bar{p}(t)=p(st),\qquad t\in\bar{R}.$$

于是$\bar{p}\in\mathscr{K}_n$，$\bar{p}(1)=p(s)=M'$，$m=\inf\ (\bar{p}(t);0\leqslant t\leqslant 1)$. 从而$(m,M')$是$\mathscr{K}_n$可及点. #

我们把求$I_n(M)$ $(n\geqslant 2$ 或 $n=\infty)$，或者求$\mathscr{K}_n$可及点集的问题称为$(m,M)$图问题. 当然，最重要的是求$I_\infty(M)$及$\mathscr{K}_\infty$(即$\mathscr{P}$)可及点的问题.

值得注意的是，在上述问题的提法中，我们把$p(1)$的值固定为$M$，然后考虑$m(p)=\inf(p(t);0\leqslant t\leqslant 1)$的变化范围. $m(p)$在$\mathscr{K}_n$的下确界就是$I_n(M)$ $(n\in N\cup\{\infty\})$. 其实，由引理 A 的证明方法看出，将点 1 换成任意$\tau\in R$，问题的提法与结论都不会有任何变化. 即设$p(\tau)$的值固定为$M$，令$m_\tau(p)=\inf(p(t);0\leqslant t\leqslant\tau)$，则$m_\tau(p)$在$\mathscr{K}_n$的下确界仍是$I_n(M)$.

引理 A 的证明方法叫作尺度变换法.

**引理** B

设 $n\in N\cup\{\infty\}$，$(m,M)$ 是 $\mathscr{K}_n$ 可及点，则

$$I_n(M)\leqslant m.$$

**证**：由定理直接看出. #

### 3. Davidson 问题

$(m,M)$图问题，即求$(I_n(M),\ 0\leqslant M\leqslant 1)(n\geqslant 2$，或 $n=\infty)$ 的问题，是一个十分困难的问题，至今未见有完满的结果.

1968 年，英国科学家 Davidson 提出了一个较为简单的问题. 他的问题只是针对标准 $p$-函数类(即 $\mathscr{P}$)而提出来的.

令

$$v_\infty=\inf(M:\ I_\infty(M)>0) \tag{20}$$

Davidson 提出的问题就是：求 $v_\infty$的准确值. 这也是一个十分困难的问题，通过众多数学家多年的努力，提出了解决这一问题的某些方法，并不断取得了一些进展. 然而，直至最近，这一问题才由本书作者彻底解决. 本书的主要目的就在于介绍作者解决这一问题的途径与方法.

相对说来，求 $v_\infty$的下界是比较容易的，1968 年 Davidson 就获得了下述结果.

**定理** I (**Davidson 定理**)

$$v_\infty\geqslant\frac{1}{e}. \tag{21}$$

**证**：设$0<q<\infty$，$0<a<\infty$，令

$$(22)\quad p_q(t)=\sum_{k=0}^{[t/a]}\frac{q^k(t-ka)^k\exp[-q(t-ka)]}{k!},\qquad t\in\overline{R}.$$

其中$[x]$表示不超过$x$的最大整数. 则$p_q(t)$ $(t\in\overline{R})$是稳定的标准$p$-函数，即$p_q\in\mathscr{P}^*(q)$. 事实上，令$\lambda\in\Lambda_I$满足条件：$\lambda(\{a\})=1$，则由第三章定理XⅡ知，$p_q\in\mathscr{P}^*(q)$且$p\sim\lambda$.

现在(22)中取$q$和$a$满足条件

$$(23)\qquad 2<q<\infty,\quad a=1-\frac{1}{q}.$$

由(23)得$\frac{1}{2}<a<1$，且$q(1-a)=1$，于是在(22)中取$t=1$得

$$(24)\qquad p_q(1)=e^{-q}+q(1-a)e^{-q(1-a)}=e^{-q}+e^{-1}.$$

而$p_q(\cdot)$在$[0,1]$是函数：

$$(25)\qquad p_q(t)=\begin{cases}e^{-qt}, & 0\leqslant t\leqslant a,\\ e^{-qt}+q(t-a)e^{-q(t-a)}, & a\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

因此，$p_q$在$[0,a]$单调下降，而在$[a,1]$上必有$p_q(t)\geqslant e^{-qa}$ $(a\leqslant t\leqslant 1)$，因此

$$(26)\qquad m(p_q)=\inf(p_q(t):0\leqslant t\leqslant 1)=e^{-qa}=e^{-(q-1)}.$$

根据定义，由(24)及(26)知$(e^{-(q-1)},e^{-q}+e^{-1})$是$\mathscr{P}$可及点，其中$q>2$，从而由引理A知，对任意$e^{-(q-1)}\leqslant M\leqslant e^{-q}+e^{-1}$，$(e^{-(q-1)},M)$是$\mathscr{P}$可及点. 根据引理B，$I(M)\leqslant e^{-(q-1)}$. 由于$q>2$是任意的，因此令$q\to\infty$，我们就得下述结论：对任意$M\leqslant 1/e$总有$I(M)=0$. 因此$v_\infty\geqslant 1/e$.　#

在获得上述结果之后，Davidson 提出下述猜测.

**Davidson 猜测**：$v_\infty=1/e$.

由定理Ⅰ，要证明上述猜测，只须证$v_\infty\leqslant 1/e$. 本书第五、六、七章将给出这一结果的完整证明，本章专门研究 Kingman 不等式

及其应用，作为附带的结果，我们将证明 $v_\infty \leqslant 1/2$.

上述问题，同样可以对函数类 $\mathscr{K}_n$ $(2\leqslant n<\infty)$ 提出，令

(27) $$v_n = \inf(M: I_n(M) > 0), \qquad n \geqslant 2$$

由(16)得

(28) $$v_2 \geqslant v_3 \geqslant \cdots \geqslant v_\infty.$$

## § 2 二，三阶 Kingman 不等式的初步结果

### 4. 二阶 Kingman 不等式的初步结果.

当 $p\in \mathscr{K}_2$，则在 § 1的(4)，(5)式中取 $n=2, t_1=s, t_2=s+t$，得

(1) $$p(t)p(s) \leqslant p(t+s), \qquad s,t \in \bar{R}.$$

(2) $$p(t+s) + p(s) - p(t)p(s) \leqslant 1, \qquad s,t \in \bar{R}.$$

或者写成

(3) $$p(t)p(s) \leqslant p(t+s) \leqslant 1 - p(s) + p(t)p(s), \quad s,t \in \bar{R}.$$

**定理 I**

设 $p\in \mathscr{K}_2, m=\min(p(t): 0\leqslant t\leqslant 1), M=p(1)$. 则

(4) $$M \leqslant \begin{cases} 1 - m + m^2, & \text{当 } m \geqslant \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{4}, & \text{当 } m \leqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

证：在(3)中取 $s+t=1$，得

(5) $$1 - p(1) \geqslant p(t)(1 - p(1-t)), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

(6) $$1 - p(1) \geqslant p(1-t)(1 - p(t)), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

因此

(7)
$$1-p(1)\geqslant \max(p(t)(1-p(1-t)),\ p(1-t)(1-p(t)),\qquad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

然而我们显然有

(8)
$$p(t)(1-p(t))\leqslant\begin{cases}p(t)(1-p(1-t)), & 当\ p(t)\geqslant p(1-t),\\ p(1-t)(1-p(t)), & 当\ p(t)\leqslant p(1-t).\end{cases}$$

将(8)代入(7)并注意 $p(1)=M$，得

(9)
$$M\leqslant 1-p(t)(1-p(t)),\qquad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

因此有

$$M\leqslant 1-m+m^2.$$

于是我们得到(4)的第一个不等式.

当 $m\leqslant ½$时，必存在 $u\in[0,1]$使 $p(u)=½$，于是由(9)即得

$$M\leqslant 1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}.$$ #

**推论**

设 $p\in\mathscr{P}$，$m=\min(p(t):0\leqslant t\leqslant 1)$，$M=p(1)$. 则

(10)
$$M\leqslant\begin{cases}1+m\log m, & 当\ 0<m\leqslant 1.\\ \dfrac{3}{4}, & 当\ m<\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

证：由第三章定理 X 的推论即得(10)的第一式. #

对 $p\in\mathscr{P}$ 来说，(10)中第一式比(4)中第一式要好，因为对任意 $0\leqslant x\leqslant 1$，$1+x\log x\leqslant 1-x+x^2$. 然而(4)是对任意 $p\in\mathscr{K}_2$成立的，而(10)式仅对 $p\in\mathscr{P}$ 成立.

关于二阶 Kingman 不等式还有一个非常平凡的结果，由于今

后要经常用到，不妨作为一个引理叙述一下.

**引理**

设 $p\in\mathscr{K}_2$，则 $p(t)>0, t\in\overline{R}$.

**证**：假设存在 $t>0$ 使 $p(t)=0$. 则令

(11) $$h=\inf\ (t: p(t)=0)$$

由 $p$ 的连续性推知 $p(h)=0$. 然而当 $0<h_1<h$ 时，$p(h)\geqslant p(h_1)p(h-h_1)$，因此 $p(h_1)=0$ 或 $p(h-h_1)=0$. 此与 $h$ 的定义(11)矛盾. #

上述引理的结论亦可见第二章定理 Ⅱ，那里虽然是对 $p\in\mathscr{P}$ 叙述的，但其证明也只用到二阶 Kingman 不等式.

## 5. 三阶 Kingman 不等式的有趣应用

设 $p\in\mathscr{K}_3$，则对任意 $r,s,t\in\overline{R}$ 有

$$p(r+s+t)-p(r)p(s+t)-p(r+s)p(t)+p(r)p(s)p(t)\geqslant 0,$$

即

(12) $$p(r+s+t)-p(r)p(s+t)\geqslant(p(r+s)-p(r)p(s))p(t),\qquad r,s,t\in\overline{R}.$$

应用上式我们得到如下的有趣结果.

**定理 Ⅱ**

设 $p\in\mathscr{K}_3$，如果存在 $u>0$，$v>0$ 使

(13) $$p(u+v)=p(u)p(v)$$

则存在 $0\leqslant q<\infty$ 使

(14)　　$p(t)=e^{-\gamma t}, \qquad 0\leqslant t\leqslant u+v.$

证：在(12)中取$0\leqslant t\leqslant v$，$r=u$. $s=v-t$ 得

$$0=p(u+v)-p(u)p(v)$$
$$\geqslant p(t)(p(u+v-t)-p(u)p(v-t)).$$

由 $p(t)>0$ 及 $p(u+v-t)\geqslant p(u)p(v-t)$ 得

(15)　　$p(u+v-t)=p(u)p(v-t), \qquad 0\leqslant t\leqslant v.$

同理，在(15)中固定$0\leqslant t\leqslant v$，得

(16)　　$p(u-s+v-t)=p(u-s)p(v-t),$

$$0\leqslant s\leqslant u, \quad 0\leqslant t\leqslant v.$$

现设$0\leqslant s\leqslant \min(u,v)$，则由(15)，(16)得

(17)　　$p(u-s+v+s)=p(u+v)=p(u)p(v)$

$$=p(u-s)p(s)p(v)=p(u-s)p(v+s)$$

同理

(18)　$p(u+v)=p(u+s)p(v-s), \quad 0\leqslant s\leqslant \min(u,v).$

因此，如果 $u=v$，则由(17)，(18)得

(19)　　$p(s+t)=p(s)p(t), \quad s,t\in \overline{R}$ 且 $s+t=u+v.$

如果 $u\neq v$，不妨设 $u<v$，则仍有

$$p(s+t)=p(s)p(t), \quad 0\leqslant s\leqslant 2u, \quad s+t=u+v.$$

依此类推，如果 $nu<v\leqslant(n+1)u$ $(n\in N)$，则

$$p(s+t)=p(s)p(t), \qquad 0\leqslant s\leqslant nu, s+t-u+v.$$

从而最后得

(20)　　$p(s+t)=p(s)p(t), \qquad s+t=u+v.$

而由(16)及(20)得

(21)　　$p(s+t)=p(s)p(t), \qquad s+t\leqslant u+v.$

在$[0,u+v]$内解方程(21)，由于$p\in\mathscr{K}_3$知$p$连续，在$[0,u+v]$内(21)之解必有形式(14). #

## §3 $n$阶 Kingman 不等式

6. 函数类$\mathscr{R}_n$

设$n\geqslant 2, p\in\mathscr{K}_n$. 于是下面的二阶 Kingman 不等式成立：

(1) $1-p(s_1)-p(s_2)+p(s_1)p(s_2-s_1)\geqslant 0,\quad 0\leqslant s_1\leqslant s_2.$

或者写成比较对称的形式：

(2) $1-p(s_2)\geqslant p(s_1)(1-p(s_2-s_1)),\qquad 0\leqslant s_1\leqslant s_2.$

当$p(s)\equiv 1\ (s\in\bar{R})$时，(2)也成为恒等式. 但是当$p\in\mathscr{K}_n$ $(n\geqslant 2)$且$p(s)\equiv 1\ (s\in\bar{R})$时，(2)就不会是恒等式，事实上，如果(2)在$[0,s_2]$内，对所有$s_1$都是等式，而且$p(s_2)=\min\ (p(t):0\leqslant t\leqslant s_2)$，则必有$1-p(s_2)\leqslant 1-p(s_2-s_1)$，$0\leqslant s_1\leqslant s_2$，即$p(s_2-s_1)\leqslant p(s_2)$. $0\leqslant s_1\leqslant s_2$，从而在$[0,s_2]$内$p(\cdot)\equiv 1$.

事实上，如果我们进一步限制$p\in\mathscr{P}$，稍后我们将要证明，当$p(s)\not\equiv 1\ (s\in\bar{R})$时，总有

(3) $1-p(s_2)>p(s_1)(1-p(s_2-s_1)),\qquad 0<s_1\leqslant s_2.$

即(2)式对一切不恒等于1的$p\in\mathscr{P}$和一切$0<s_1\leqslant s_2$. 都取不等号.

因此(2)式是可以改进的，本章今后的主要目的是对$p\in\mathscr{K}_n$ $(n\geqslant 2)$和$\mathscr{P}$改进(2)式.

首先给出一些必要的记号和定义.

为了叙述方便，我们仍记$\mathscr{K}_\infty=\mathscr{P}$. 下面的定义中，$n\geqslant 2$或$n=\infty$是固定的.

设 $R(\cdot)$是定义在$[0,1]$上且取值于$[0,1]$的任意函数,如果对任意 $p\in\mathscr{K}_n$,任意$0\leqslant s_1\leqslant s_2$成立

$$1-p(s_2)\geqslant R(p(s_1))-p(s_1)p(s_2-s_1). \tag{4}$$

则记 $R(\cdot)\in\mathscr{R}_n$.

由于

$$\mathscr{K}_2\supset\mathscr{K}_3\supset\cdots\supset\mathscr{K}_\infty=\mathscr{P} \tag{5}$$

故

$$\mathscr{R}_2\subset\mathscr{R}_3\subset\cdots\subset\mathscr{R}_\infty \tag{6}$$

取 $R(x)=x(x\in[0,1])$,则由(2)知,$R\in\mathscr{R}_2$,从而 $\mathscr{R}_n(n\geqslant 2)$非空.

设 $R_1\in\mathscr{R}_n$, $R_2\in\mathscr{R}_n$, 则 $R_1\vee R_2\in\mathscr{R}_n$ 其中, $R_1\vee R_2(x)=\max(R_1(x),R_2(x))$, $x\in[0,1]$. 其次,若令

$$R_n^*(x)=\sup(R(x):R\in\mathscr{R}_n),\qquad 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{7}$$

则易证 $R_n^*\in\mathscr{R}_n$.

若在(4)中代 $R$ 为 $R_n^*$,我们就得到 $\mathscr{K}_n$ 中的函数的最精确的不等式.

## 7. 引理

设$3\leqslant n<\infty$,$p\in\mathscr{K}_n$. 又设存在

$$0=t_0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_n,$$

使

$$p(t_n-t_{n-1})\geqslant p(t_n-t_{n-2})\geqslant\cdots\geqslant p(t_n-t_1). \tag{8}$$

则对任意 $R\in\mathscr{R}_n$,$1\leqslant j\leqslant n-2$ 有

$$\frac{1-p(t_n)}{p(t_n-t_{n-j})}\geqslant\sum_{k=1}^{n-j-1}f(t_k)\left(1-\frac{p(t_n-t_k)}{p(t_n-t_{n-j})}\right) \tag{9}$$

$$+\sum_{k=2}^{j}\left(1-\frac{p(t_n-t_{n-k})}{p(t_n-t_{n-k+1})}\right)\frac{R(p(t_n-t_{n-k}))}{p(t_n-t_{n-k})}.$$

其中 $f(\cdot)$和下面证明中的 $g(\cdot)$的定义见§1(8)式.

**证**:首先考虑 $j=1$的情形. 由§1(10)式得

$$\begin{aligned}
0\leqslant g(t_n) &= 1-f(t_n)-f(t_{n-1})-\sum_{k=1}^{n-2}f(t_k)\\
&= 1-p(t_n)+\sum_{k=1}^{n-1}f(t_k)p(t_n-t_k)-p(t_{n-1})\\
&\quad +\sum_{k=1}^{n-2}f(t_k)p(t_{n-1}-t_k)-\sum_{k=1}^{n-2}f(t_k)\\
&= 1-p(t_n)-p(t_{n-1})+f(t_{n-1})p(t_n-t_{n-1})\\
&\quad -\sum_{k=1}^{n-2}f(t_k)(1-p(t_n-t_k)-p(t_{n-1}-t_k))\\
&= 1-p(t_n)-p(t_{n-1})+p(t_{n-1})p(t_n-t_{n-1})\\
&\quad -\sum_{k=1}^{n-2}f(t_k)p(t_{n-1}-t_k)p(t_n-t_{n-1})\\
&\quad -\sum_{k=1}^{n-2}f(t_k)(1-p(t_n-t_k)-p(t_{n-1}-t_k))\\
&= 1-p(t_n)-p(t_{n-1})(1-p(t_n-t_{n-1}))\\
&\quad -\sum_{k=1}^{n-2}f(t_k)\Big(1-p(t_n-t_k)\\
&\qquad\qquad -p(t_{n-1}-t_k)(1-p(t_n-t_{n-1}))\Big)
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
(10)\quad 1-p(t_n) &\geqslant p(t_{n-1})(1-p(t_n-t_{n-1}))\\
&\quad +\sum_{k=1}^{n-2}f(t_k)(1-p(t_n-t_k)-p(t_{n-1}-t_k)(1-p(t_n-t_{n-1}))).
\end{aligned}$$

由二阶 Kingman 不等式有

$$(11)\qquad p(t_{n-1}-t_k)\leqslant\frac{p(t_n-t_k)}{p(t_n-t_{n-1})},\quad 1\leqslant k\leqslant n-2.$$

又因 $R\in\mathscr{R}_n$，在(4)中取 $s_2=t_n, s_1=t_n-t_{n-1}$ 得

$$1-p(t_n)\geqslant R(p(t_n-t_{n-1}))-p(t_n-t_{n-1})p(t_{n-1}).$$

即

$$(12)\qquad p(t_{n-1})\geqslant\frac{R(p(t_n-t_{n-1}))}{p(t_n-t_{n-1})}-\frac{1-p(t_n)}{p(t_n-t_{n-1})}.$$

将(11),(12)代入(10)中得

$$\begin{aligned}&1-p(t_n)\\&\geqslant\left(\frac{R(p(t_n-t_{n-1})}{p(t_n-t_{n-1})}-\frac{1-p(t_n)}{p(t_n-t_{n-1})}\right)(1-p(t_n-t_{n-1}))\\&\quad+\sum_{k=1}^{n-2}f(t_k)\left(1-p(t_n-t_k)-\frac{p(t_n-t_k)}{p(t_n-t_{n-1})}(1-p(t_n-t_{n-1}))\right)\\&\quad-\left(\frac{R(p(t_n-t_{n-1})}{p(t_n-t_{n-1})}-\frac{1-p(t_n)}{p(t_n-t_{n-1})}\right)(1-p(t_n-t_{n-1}))\\&\quad+\sum_{k=1}^{n-2}f(t_k)\left(1-\frac{p(t_n-t_k)}{p(t_n-t_{n-1})}\right)\end{aligned}$$

于是得

$$(13)\qquad \frac{1-p(t_n)}{p(t_n-t_{n-1})}\geqslant(1-p(t_n-t_{n-1}))\frac{R(p(t_n-t_{n-1}))}{p(t_n-t_{n-1})}+\sum_{k=1}^{n-2}f(t_k)\left(1-\frac{p(t_n-t_k)}{p(t_n-t_{n-1})}\right).$$

从而当 $j=1$ 时，引理的结论成立. 但是，如果 $n=3$，$j$ 只能取 1. 所以下面假定 $n\geqslant4$.

现在对 $j$ 施行归纳法，假定 $1\leqslant j\leqslant n-3$，引理的结论成立，即假定有

$$(14)\qquad \frac{1-p(t_n)}{p(t_n-t_{n-j})}\geqslant\sum_{k=1}^{j}a_k+I_j,\qquad 1\leqslant j\leqslant n-3.$$

其中

$$(15)\quad a_k = \left(1 - \frac{p(t_n - t_{n-k})}{p(t_n - t_{n-1})}\right)\frac{R(p(t_n - t_{n-k}))}{p(t_n - t_{n-k})}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant j,$$

$$(16)\qquad I_j = \sum_{k=1}^{n-j-1} f(t_k)\left(1 - \frac{p(t_n - t_k)}{p(t_n - t_{n-j})}\right).$$

我们的目的是在假定 (14) 之下证明

$$(17)\qquad \frac{1 - p(t_n)}{p(t_n - t_{n-j-1})} \geqslant \sum_{k=1}^{j+1} a_k + I_{j+1}.$$

为此，首先变换 (14) 中右边的 $I_j$ 项.

$$\begin{aligned}
(18)\quad I_j &= \sum_{k=1}^{n-j-1} f(t_k)\left(1 - \frac{p(t_n - t_k)}{p(t_n - t_{n-j})}\right) \\
&= f(t_{n-j-1})\left(1 - \frac{p(t_n - t_{n-j-1})}{p(t_n - t_{n-j})}\right) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-j-2} f(t_k)\left(1 - \frac{p(t_n - t_k)}{p(t_n - t_{n-j})}\right) \\
&= p(t_{n-j-1})\left(1 - \frac{p(t_n - t_{n-j-1})}{p(t_n - t_{n-j})}\right) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n-j-2} f(t_k)\left(1 - \frac{p(t_n - t_{n-j-1})}{p(t_n - t_{n-j})}\right) p(t_{n-j-1} - t_k) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-j-2} f(t_k)\left(1 - \frac{p(t_n - t_k)}{p(t_n - t_{n-j})}\right).
\end{aligned}$$

现在由二阶 Kingman 不等式

$$(19)\quad p(t_{n-j-1} - t_k) \leqslant \frac{p(t_n - t_k)}{p(t_n - t_{n-j-1})}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n - j - 2.$$

应用 $R \in \mathscr{R}_n$ 的条件得

$$(20)\qquad p(t_{n-j-1}) \geqslant \frac{R(p(t_n - t_{n-j-1}))}{p(t_n - t_{n-j-1})} - \frac{1 - p(t_n)}{p(t_n - t_{n-j-1})}.$$

由 (8) 知 $p(t_n - t_{n-j}) \geqslant p(t_n - t_{n-j-1})$. 将 (19) (20) 代入 (18) 得

(21)

$$
\begin{aligned}
I_j \geqslant & \left\{ \frac{R(p(t_n - t_{n-j-1}))}{p(t_n - t_{n-j-1})} - \frac{1 - p(t_n)}{p(t_n - t_{n-j-1})} \right\} \left( 1 - \frac{p(t_n - t_{n-j-1})}{p(t_n - t_{n-j})} \right) \\
& + \sum_{k=1}^{n-j-2} f(t_k) \left\{ 1 - \frac{p(t_n - t_k)}{p(t_n - t_{n-j})} \right. \\
& \qquad \left. - \frac{p(t_n - t_k)}{p(t_n - t_{n-j-1})} \left( 1 - \frac{p(t_n - t_{n-j-1})}{p(t_n - t_{n-j})} \right) \right\} \\
= & \left( 1 - \frac{p(t_n - t_{n-j-1})}{p(t_n - t_{n-j})} \right) \frac{R(p(t_n - t_{n-j-1}))}{p(t_n - t_{n-j-1})} - \frac{1 - p(t_n)}{p(t_n - t_{n-j-1})} \\
& + \frac{1 - p(t_n)}{p(t_n - t_{n-j})} + \sum_{k=1}^{n-j-2} f(t_k) \left( 1 - \frac{p(t_n - t_k)}{p(t_n - t_{n-j-1})} \right) \\
= & \, a_{j+1} - \frac{1 - p(t_n)}{p(t_n - t_{n-j-1})} + \frac{1 - p(t_n)}{p(t_n - t_{n-j})} + I_{j+1}.
\end{aligned}
$$

将 (21)代入 (14) 就得(17).　　#

8. $n$ 阶 Kingman 不等式的推论.

关于 $\mathscr{K}_n(2 \leqslant n \leqslant \infty)$函数类的 $(m, M)$ 图问题,目前没有令人满意的结果. 下面的结果是 V. M. Joshi 在1975年获得的.

**定理Ⅳ**

设 $p \in \mathscr{K}_n(2 \leqslant n \leqslant \infty)$ . $p(1) = M, m = \inf(p(t): 0 \leqslant t \leqslant 1)$, 则

$$M \leqslant 1 + \rho^2 - \left( 1 - \frac{1 - \rho}{n - 1} \right)^{n-1}, \quad \text{当 } m \leqslant \rho. \tag{22}$$

$$M \leqslant 1 + m^2 - \left( 1 - \frac{1 - m}{n - 1} \right)^{n-1}, \quad \text{当 } m \geqslant \rho. \tag{23}$$

其中 $\rho$ 是下述方程的唯一解：

$$2\rho = \left(1 - \frac{1-\rho}{n-1}\right)^{n-1}. \tag{24}$$

**证**：当 $n=2$ 时，(24)有解 $\rho=0$. (23)由定理 I 给出.

因此下面假定 $n\geqslant 3$.

在 $(0,1)$ 中任取点 $\tau$，且记 $p(\tau)=\alpha$. 现取 $t_1\in(0,1)$，使得或者

$$p(t_1) = \alpha \quad 且 \quad p(1-t_1) \leqslant \alpha, \tag{25}$$

或者

$$p(t_1) \geqslant \alpha \quad 且 \quad p(1-t_1) = \alpha. \tag{26}$$

满足 (25) 或 (26) 的 $t_1$总存在，事实上，令

$$\omega = \inf(t: p(t) = \alpha). \tag{27}$$

由连续性知 $p(\omega)=\alpha$ 如果 $p(1-\omega)\leqslant\alpha$，则取 $t_1=\omega$，此时 (25)成立. 如果 $p(1-\omega)>\alpha$，则取 $t_1=1-\omega$. 此时 (26) 成立.

取定 $t_1$之后，现取序列

$$t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant \cdots \leqslant t_n = 1\ . \tag{28}$$

使得

$$p(t_n - t_{r+1}) \geqslant p(t_n - t_r) > 0, \qquad 1\leqslant r\leqslant n-1. \tag{29}$$

由于 $p$ 在$[0,\infty)$ 连续且 $p(0)=1$，满足条件(29) 的 $(t_2,\cdots,t_{n-1})$ 总存在.

现在上述引理中取 $R(x)=x$ 及 $j=n-2$ 并注意 $t_n=1$ 及 $p(1)=M$，得

$$\frac{1-M}{p(t_n-t_2)} \geqslant p(t_1)\left(1-\frac{p(t_n-t_1)}{p(t_n-t_2)}\right) \tag{30}$$

$$+\sum_{k=1}^{n-2}\left(1-\frac{p(t_n-t_{n-k})}{p(t_n-t_{n-k+1})}\right).$$

令

(31)
$$\beta_1=1-\frac{1}{n-1}(1-\alpha),$$

(32)
$$\beta_k=\beta_1{}^k,\qquad 1\leqslant k\leqslant n-2\,.$$

则

(33)
$$\beta_1>\beta_2>\cdots>\beta_{n-2}>\left(1-\frac{1}{n-1}(1-\alpha)\right)^{(n-1)}>\alpha\,.$$

现在选取 $t_2,\cdots,t_n$ 满足条件 (28) 且使得

(34)
$$p(t_n-t_{n-k})=\beta_k,\qquad 1\leqslant k\leqslant n-2.$$

条件 (29)显然成立. 于是由(30)得

(35)

$$\begin{aligned}1-M&\geqslant\alpha\beta_{n-2}-\alpha^2+\beta_{n-2}\left(1-\beta_1+\sum_{k=1}^{n-3}\left(1-\frac{\beta_{k+1}}{\beta_k}\right)\right)\\&=-\alpha^2+\beta_{n-2}(\alpha+(n-2)(1-\beta_1))\\&=-\alpha^2+\beta_1{}^{n-1}=-\alpha^2+\left(1-\frac{1}{n-1}(1-\alpha)\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

现记(35) 的右边为 $G(\alpha)$ ,则

(36)
$$G'(\alpha)=-2\alpha+\left(1-\frac{1}{n-1}(1-\alpha)\right)^{n-2},\ 0\leqslant\alpha\leqslant1.$$

(37)
$$G''(\alpha)=-2+\frac{n-2}{n-1}\left(1-\frac{1}{n-1}(1-\alpha)\right)^{n-3}<0\,,$$

$$0\leqslant\alpha\leqslant1.$$

由 (36) 知 $G'(0)>0$, $G'(1)<0$,而由 (37) 知 $G'(\alpha)$ 在[0,1]单调

下降，因此存在唯一的 $\rho\in(0,1)$ 使 $G'(\rho)=0$，而 $G'(\rho)=\max(G(a);0\leqslant a\leqslant 1)$. 现设 $m=\min(p(t);0\leqslant t\leqslant 1)$ 当 $\rho\geqslant m$ 时，存在 $\tau\in(0,1)$ 使 $p(\tau)=\rho$. 因此由 (35)

$$1-M\geqslant G(\rho)=-\rho^2+\left(1-\frac{1}{n-1}(1-\rho)\right)^{n-1},$$

即 (22) 成立.

如果 $m>\rho$，则由 $G'(a)$ 的单调下降性知，$G(\cdot)$ 在 $a=m$ 达到最大，故得(23). #

## § 4 标准 $p$-函数的二阶 Kingman 不等式的改进及其应用

### 9. 初步改进

前面的定理 I ～ IV 所考虑的函数类是 $\mathscr{K}_n$，其中 $n$ 是有限的自然数，这些函数类较广泛，没有什么一般理论，前述的几个定理仅仅是有限阶 Kingman 不等式的简单推论而已.

现在我们考虑标准 $p$-函数类 $\mathscr{P}$. §1 已经指出 $\mathscr{P}=\mathscr{K}_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}\mathscr{K}_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{K}_n$. 对于 $\mathscr{P}$，我们已经有了第三章的一般理论. 而且对任意 $p\in\mathscr{P}$，$p$ 满足所有各阶 Kingman 不等式，因此研究起来将会方便许多. 我们的目的是改进标准 $p$- 函数的二阶 Kingman 不等式. 为了叙述方便，不妨重提一下 §3 已经定义了的函数类 $\mathscr{R}_\infty$. 设 $R(\cdot)$ 是定义在[0,1]上且取值于[0,1]的任意函数. 称 $R\in\mathscr{R}_\infty$，如果对任意 $p\in\mathscr{P}$ 和任意的 $0\leqslant s_1\leqslant s_2$ 成立

(1) $$1-p(s_2)\geqslant R(p(s_1))\quad p(s_1)p(s_2-s_1).$$

**定理 V**

设 $G(x)=e^{-(1-x)}$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$，则 $G\in\mathscr{R}_\infty$.

**证**：首先假定 $p(s_1)\geqslant p(s_2-s_1)$，任取 $n\in N$，$n\geqslant 3$，并选点列 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 使

(2) $$0=t_0\leqslant t_1=s_1\leqslant\cdots\leqslant t_n=s_2$$

满足条件

(3) $$\beta_1=p(t_n-t_{n-1})=1-\frac{1}{n-1}(1-\alpha).$$

其中 $\alpha=p(t_1)=p(s_1)$ 和

(4) $$\beta_k=\beta_1^k=p(t_n-t_{n-k}),\qquad 1\leqslant k\leqslant n-2.$$

由 $p$ 的连续性和 $p(0)=1$，满足条件(2)、(3)、(4) 的点列 $t_2,\cdots,t_{n-1}$，总存在，显然

(5) $$\beta_1>\beta_2>\cdots>\beta_{n-2}>\left((1-\frac{1}{n-1}(1-\alpha)\right)^{n-1}$$
$$>\alpha\geqslant p(t_n-t_1).$$

于是在 §3 的不等式(9) 中取 $j=n-2$ 和 $R(x)=x$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$，得

(6) $$1-p(t_n)\geqslant\alpha\beta_{n-2}-\alpha p(t_n-t_1)$$
$$+\beta_{n-2}\left(1-\beta_1+\sum_{k=1}^{n-3}\left(1-\frac{\beta_{k+1}}{\beta_k}\right)\right)$$
$$=-p(t_1)p(t_n-t_1)+\left(1-\frac{1}{n-1}(1-p(t_1))\right)^{n-1}.$$

在(6) 中令 $n\to\infty$ 并注意 $t_n=s_2,t_1=s_1$ 得

(7) $$1-p(s_2)\geqslant -p(s_1)p(s_2-s_1)+e^{-(1-p(s_1))}.$$

如果 $p(s_2-s_1)\geqslant p(s_1)$，则将上面的推导应用于 $s'_1=s_2-s_1$，

此时 $s_2-s'_1=s_1$，则得

(8) $$1-p(s_2)\geqslant -p(s_1)p(s_2-s_1)+e^{-(1-p(s_2-s_1))}$$
$$\geqslant -p(s_1)p(s_2-s_1)+e^{-(1-p(s_1))}.$$

由定义知，$G\in\mathscr{R}_\infty$. #

## 10. 若干引理

定理 V 的结果已经对标准 $p$- 函数的二阶 Kingman 不等式有了初步的改进. 事实上，因为 $e^{-(1-x)}>x$ $(0<x<1)$，所以在 (8) 式中，如果 $0<p(s_1)<1$，则当 $1<s_1<s_2$ 时

$$1-p(s_2)\geqslant -p(s_1)p(s_2-s_1)+e^{-(1-p(s_1))}$$
$$>-p(s_1)p(s_2-s_1)+p(s_1).$$

为了进一步改进二阶 Kingman 不等式，我们需要若干引理.

**引理 A**

如果 $R\in\mathscr{R}_\infty$，且成立

(9) $$R(y)-R(x)\geqslant x(y-x),\qquad 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1.$$

则对任意 $p\in\mathscr{P}$，有

(10) $$1-p(s_2)\geqslant R(p(s_1))-p^2(s_1),\qquad 0\leqslant s_1\leqslant s_2.$$

证：由于 $R\in\mathscr{R}_\infty$，故

(11) $$1-p(s_2)\geqslant R(p(s_1))-p(s_1)p(s_2-s_1),$$
$$0\leqslant s_1\leqslant s_2.$$

(12) $$1-p(s_2)\geqslant R(p(s_2-s_1))-p(s_1)p(s_2-s_1),$$
$$0\leqslant s_1\leqslant s_2.$$

如果 $p(s_1)\geqslant p(s_2-s_1)$，则由 (11) 直接得(10). 如果 $p(s_1)<p(s_2$

$-s_1)$，则由(12)及(9)得

$$\begin{aligned}1-p(s_2)&\geqslant R(p(s_2-s_1))-p(s_1)p(s_2-s_1)\\&\geqslant R(p(s_1))+p(s_1)(p(s_2-s_1)-p(s_1))\\&\quad-p(s_1)p(s_2-s_1)\\&=R(p(s_1))-p^2(s_1).\end{aligned}$$ #

由引理 A 与定理 V，立即得到下面的推论.

**推论**

设 $p\in\mathscr{P}, p(1)=M, m=m(p)=\inf(p(t):0\leqslant t\leqslant 1)$，则

(13) $$M\leqslant 1+m^2-e^{-(1-m)}.$$

证：取 $R(x)=e^{-(1-x)}(0\leqslant x\leqslant 1)$. 由定理 V，$R\in\mathscr{R}_\infty$. 现在只须证明 $R$ 满足(9)式. 固定 $x\geqslant 0$，令

(14) $$f(y)=e^{-(1-y)}-e^{-(1-x)}-xy+x^2\qquad x\leqslant y\leqslant 1.$$

则 $f'(y)=e^{-(1-y)}-x\geqslant y-x\geqslant 0$ $(0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1)$，从而 $f$ 在 $[x,1]$ 是 $y$ 的不减函数，故(9)式成立. #

现在我们引进一个函数序列，然后由它构造出 $R_\infty$ 的一个序列.

令

(15) $$A_0(x)\equiv 1,\qquad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

而 $(A_l(x), l\in N, 0\leqslant x\leqslant 1)$ 由下述关系归纳地定义：

(16) $$\int_{A_l(x)}^1\frac{A_{l-1}(s)}{s}ds=1-x,\qquad l\in N, 0\leqslant x\leqslant 1.$$

我们现在首先给出序列 $(A_l(x), l\in\overline{N}, 0\leqslant x\leqslant 1)$ 的一系列性质.

**引理 B**

(17) $$A_1(x) = e^{-(1-x)}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

**证:** 由关系式 (15)、(16) 即得

$$\int_{A_1(x)}^{1} \frac{ds}{s} = -\log A_1(x) = 1 - x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

因此 $A_1(x) = e^{-(1-x)}$. #

**引理 C**

对任意 $l \in N$, $A_l(x)$ 是$[0,1]$上的严格单调上升的连续函数，而且有

(18) $$x \leqslant A_l(x) \leqslant 1, \quad A_l(1) = 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

和

(19) $$A_l(x) - A_l(x_0) \leqslant x - x_0, \quad 0 \leqslant x_0 \leqslant x \leqslant 1.$$

**证:** 由于 $A_0(x) \equiv 1$ 所以满足 (18) 和 (19) 式. 现在假定 (18) 和 (19) 对 $1, 2, \cdots, l-1$ 均成立，其中 $l \geqslant 2$，则有

(20) $$\frac{A_{l-1}(x)}{x} \geqslant 1$$

从而由(16)知 $x \leqslant A_l(x) \leqslant 1$. 因此 (18) 对 $l$ 亦成立. 现在当 $x \geqslant x_0$ 时，由定义(16) 式得

$$\int_{A_l(x_0)}^{1} \frac{A_{l-1}(s)}{s} ds - \int_{A_l(x)}^{1} \frac{A_{l-1}(s)}{s} ds = (1 - x_0) - (1 - x)$$

即

$$\int_{A_l(x_0)}^{A_l(x)} \frac{A_{l-1}(x)}{s} ds = (x - x_0)$$

由（20）就得

$$(21) \qquad (x-x_0) \geqslant \int_{A_l(x_0)}^{A_l(x)} ds = A_l(x) - A_l(x_0) .$$

因此(19)对 $l$ 亦成立，由归纳法假定，(18)与(19)对一切 $l\in\overline{N}$ 成立. 至于 $A_l(x)$ 是 $x$ 的连续函数，容易从(21)看出. #

**引理 D**

对任意 $x\in[0,1]$，有

$$(22) \qquad A_{l+1}(x) \leqslant A_l(x) \qquad l\in N.$$

证：仍然应用归纳法. 当 $l=0$ 时

$$1 = A_0(x) \geqslant e^{-(1-x)} = A_1(x), \qquad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

现在设(22)对1，…，$l$ 成立. 则

$$(23) \quad \int_{A_{l+2}(x)}^{1} \frac{A_{l+1}(s)}{s} ds = \int_{A_{l+1}(x)}^{1} \frac{A_l(s)}{s} ds = 1-x,\ 0\leqslant x\leqslant 1.$$

由归纳法假定 $A_{l+1}(s) \geqslant A_l(s) \quad (0\leqslant s\leqslant 1)$，则

$$r_l(s) = A_{l+1}(s) - A_l(s) \geqslant 0, \qquad 0\leqslant s\leqslant 1.$$

因此由（23）得

$$\int_{A_{l+2}(x)}^{1} \frac{A_l(s)}{s} ds + \int_{A_{l+2}(x)}^{1} \frac{r_l(s)}{s} ds = \int_{A_{l+1}(x)}^{1} \frac{A_l(s)}{s} ds$$

所以 $A_{l+2}(x)\geqslant A_{l+1}(x)$. ，从而（22）对一切 $l\in\overline{N}$ 成立. #

下面我们令

$$(24) \qquad N_1(x) = x, \qquad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

而对 $l\geqslant 2$，归纳地定义

$$(25) \qquad N_l(x) = N_{l-1}(A_l(x)), \qquad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

由上述定义我们即得

(26) $$N_2(x) = A_2(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

(27) $$N_l(x) = A_2(A_3(\cdots(A_l(x))\cdots)), \quad l > 2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

**引理 E**

对任意 $l \in N$ ,$N_l(x)$ 是 $x$ 在[0,1]上的单调上升连续函数,而且有

(28) $$x \leqslant N_l(x) \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

(29) $$N_l(x) - N_l(x_0) \leqslant x - x_0, \quad 0 \leqslant x_0 \leqslant x \leqslant 1.$$

而对固定的 $x \in [0,1]$ 有

(30) $$N_{l+1}(x) \geqslant N_l(x), \qquad l \in N.$$

**证**:连续性、单调上升性及(28)、(29)由引理 C 立得,又由(18),$N_{l+1}(x) = N_l(A_{l+1}(x)) \leqslant N_l(x)$, $l \in N$, $0 \leqslant x \leqslant 1$,从而得(30). #

**引理 F**

对任意 $l \in N$,$A'_l(x)$,$N'_l(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$存在且

(31) $$A'_{l+1}(x) = \frac{A_{l+1}(x)}{A_l(A_{l+1}(x))}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

和

(32) $$N'_{l+1}(x) = N'_l(y)\Big|_{y=A_{l+1}(x)} A'_{l+1}(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

**证**:由定义

$$\int_{A_{l+1}(x)}^{1} \frac{A_l(x)}{s} ds - 1 - x, \quad l \in N, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

将上式两边对 $x$ 求导数即得(31),(32) 由定义 (25) 即得.　　#

**引理 G**

对任意 $l \in N$ 我们有

(33)　$$\frac{d}{dx} e^{-(1-N_l(x))} = A_l(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

**证**:当 $l-1$ 时 ,$N_1(x)=x$ ,故

(34)　$$\frac{d}{dx} e^{-(1-x)} = e^{-(1-x)} = A_1(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

当 $l \geqslant 2$ 时 $N_1(x)=N_{l-1}(A_l(x))$,故

(35)　$$\frac{d}{dx} e^{-(1-N_l(x))} = \frac{d}{dx} e^{-(1-N_{l-1}(A_l(x)))}$$

$$= \frac{d}{dy} e^{-(1-N_{l-1}(y))} \Big|_{y=A_l(x)} A'_l(x) \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

现在运用归纳法证明 (33). 由(34) 知 $l=1$ ,(33)成立. 当 $l=2$ 时 ,由 ((35) 及 $N_1(x)=x$ 得

(36)　$$\frac{d}{dx} e^{-(1-N_2(x))} = \frac{d}{dx} e^{-(1-N_1(A_2(x)))}$$

$$= \frac{d}{dx} e^{-(1-A_2(x))} = e^{-(1-A_2(x))} A'_2(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

但由(31),

(37)　$$A'_2(x) = \frac{A_2(x)}{A_1(A_2(x))} = \frac{A_2(x)}{e^{-(1-A_2(x))}}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

将 (37) 代入 (36) 即得

$$\frac{d}{dx}e^{-(1-N_2(x))} = A_2(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

现设 (33) 对 $l \geqslant 2$ 正确，则由 $N_{l+1}(x) = N_l(A_{l+1}(x))$ 得

$$\frac{d}{dx}e^{-(1-N_{l+1}(x))} = \frac{d}{dy}e^{-(1-N_l(y))}\Big|_{y=A_{l+1}(x)}A'_{l+1}(x). \tag{38}$$

由归纳法假定

$$\frac{d}{dy}e^{-(1-N_l(y))} = A_l(y). \tag{39}$$

将 (39) 代入 (38)，并由 (31) 就得

$$\frac{d}{dx}e^{-(1-N_{l+1}(x))} = A_l(A_{l+1}(x))\frac{A_{l+1}(x)}{A_l(A_{l+1}(x))} = A_{l+1}(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

从而 (33) 对一切 $l \in N$ 成立. #

**引理 H**

$$\lim_{l\to\infty} A_l(0) = 0. \tag{40}$$

证：由 (39) 得

$$e^{-(1-N_l(y))} - e^{-(1-N_l(0))} = \int_0^y A_l(x)dx. \tag{41}$$

特别令 $y = A_{l+1}(0)$，则

$$e^{-(1-N_l(A_{l+1}(0)))} - e^{-(1-N_l(0))} = \int_0^{A_{l+1}(0)} A_l(x)dx. \tag{42}$$

由引理 D 知，$\lim\limits_{l\to\infty} A_l(0)$ 存在，由引理 E 知，$\lim\limits_{l\to\infty} N_l(0)$存在，故 (42) 的左边的极限为

$$\lim_{l\to\infty} e^{-(1-N_l(A_{l+1}(0)))} - e^{-(1-N_l(0))} = \lim_{l\to\infty} e^{-(1-N_{l+1}(0))} - e^{-(1-N_l(0))} = 0$$

而 (42) 的右边的极限为

$$\lim_{l\to\infty} \int_0^{A_{l+1}(0)} A_l(x)dx$$

$$\geqslant \lim_{l\to\infty}\int_0^{A_{l+1}(0)} A_l(0)dx$$

$$= \lim_{l\to\infty} A_{l+1}(0)A_l(0)$$

$$= \lim_{l\to\infty} (A_l(0))^2$$

从而 $\lim\limits_{l\to\infty} A_l(0) = 0$. #

由引理 D 知下述极限存在

(43) $$\lim_{l\to\infty} A_l(x) = A(x), \qquad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

而且对一切 $l\in N$ ，$A_l(x)\geqslant A(x)\geqslant x$. 又由引理 E 知下述极限存在

(44) $$\lim_{l\to\infty} N_l(x) = N(x), \qquad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

而且对一切 $l\in N$ ，$N_l(x)\leqslant N(x)\leqslant 1$.

下面我们给出 $N(x)$ 和 $A(x)$ 的明显表达式. 首先注意，由 (19) 及 (29) 知$(A_l, l\in N)$ 及$(N_l, l\in N)$ 都是均匀一致连续的，从而 $A(\cdot)$ 及 $N(\cdot)$是连续函数.

**引理 I**

(45) $$A(x) = x, \qquad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

**证:** 由引理 H 知 $\lim\limits_{l\to\infty} A_l(0) = 0$. 任给 $\varepsilon>0$ ，选取 $l$ 充分大，使 $A_{l+1}(0)<\varepsilon$. 于是我们有

$$1 = \int_{A_{l+1}(0)}^1 \frac{A_l(s)}{s}ds \geqslant \int_\varepsilon^1 \frac{A(s)}{s}ds \geqslant 1-\varepsilon$$

从而

$$\int_0^1 \frac{A(s)}{s}ds = 1.$$

但是 $A(s)\geqslant s$ 且 $A(\cdot)$ 在$[0,1]$ 连续，故 $A(s)=s, 0\leqslant s\leqslant 1$. #

**引理 J**

$$(46)\qquad N(x)=1+\log\frac{1+x^2}{2},\qquad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

**证**:由引理 G ,对一切 $l\in N$

$$e^{-(1-N_l(x))}N_l'(x)=A_l(x),\qquad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

从而

$$(47)\quad N_l(x)-N_l(0)=\int_0^x\frac{A_l(s)}{e^{-(1-N_l(s))}}ds,\qquad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

在 (47) 中令 $l\to\infty$ ,并注意$(A_l,l\in N)$ 与$(N_l,l\in N)$ 是均匀一致连续的,则有

$$N(x)-N(0)=\int_0^x\frac{A(s)}{e^{-(1-N(s))}}ds,\qquad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

$$=\int_0^x\frac{s}{e^{-(1-N(s))}}ds,\qquad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

于是我们得

$$(48)\qquad \frac{d}{dx}e^{-(1-N(x))}=x,\qquad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

解微分方程(48) 得

$$(49)\qquad e^{-(1-N(x))}-e^{-(1-N(0))}=\frac{x^2}{2},\qquad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

但是我们有边界条件

$$(50)\qquad N(1)=\lim_{l\to\infty}N_l(1)=1.$$

将 (50) 代入 (49) 得 $e^{-(1-N(0))}=\frac{1}{2}$. 因此

$$e^{-(1-N(x))}=\frac{1+x^2}{2},\qquad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

#

## 11. 主要结果

我们的主要目的是寻求属于 $\mathscr{R}_\infty$ 的较为广泛的函数类，并以此来改进标准 $p$- 函数的二阶 Kingman 不等式。为了使主要结果的证明不致于太繁琐，我们把证明过程所用到的某些事实预先写成引理的形式.

**引理 K**

对任意 $l\geqslant 2$ (即不含 $l=0,1$)，有

(51) $\qquad x < A_l(x) < A'_l(x) < 1, \qquad 0\leqslant x\leqslant 1.$

而对 $l=1$ 有

(52) $x < A_1(x) = e^{-(1-x)} = A'_1(x) < 1, \qquad 0\leqslant x\leqslant 1.$

证:若令 $h(x)=A_1(x)/x$, ,则 $h'(x)=(x-1)A_1(x)/x^2$. 从而 $h(x)=e^{-(1-x)}/x$ 是(0,1) 严格单调下降的.

由定义，(52) 显然，现在用归纳法证明(51)．当 $l=2$ 时，由于

$$\int_{A_2(x)}^1 \frac{A_1(s)}{s}ds = \int_{A_2(x)}^1 \frac{e^{-(1-s)}}{s}ds = 1-x, \qquad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

因此

(53) $A'_2(x) = \dfrac{A_2(x)}{e^{-(1-A_2(x))}} = (h(A_2(x)))^{-1}, \qquad 0\leqslant x\leqslant 1.$

由于 $A_2(\cdot)$ 在[0,1] 严格单调上升，因此 $A_2'(x)$ 也是严格单调上升的。从(53) 知，(51) 对 $l=2$ 显然成立.

现在假定(51) 对2，3，…，$l(l\geqslant 2)$ 都成立，因此

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{A_l(x)}{x}\right) = \frac{xA'_l(x)-A_l(x)}{x^2} = \frac{A_l(x)}{x}\left(\frac{A'_l(x)}{A_l(x)}-\frac{1}{x}\right)$$

由归纳法假定 $\frac{d}{dx}\left(\frac{A_l(x)}{x}\right)<0$ ,从而 $A_l(x)/x$ 是(0,1) 内严格单调下降的函数,于是 $x/A_l(x)$ 在 (0,1) 内是严格单调上升的.

现在由

$$\int_{A_{l+1}(x)}^{1}\frac{A_l(s)}{s}ds=1-x$$

得

$$A'_{l+1}(x)=\frac{A_{l+1}(x)}{A_l(A_{l+1}(x))}$$

从而 $A'_{l+1}(x)$ 在 (0,1) 内严格单调上升。于是 (51) 对 $l+1$ 成立.

#

引理 L

对任意 $l\geqslant 2$ ,$e^{-(1-N_l(x))}/x$ 是 $x$ 在[0,1] 内的严格单调下降函数.

证:当 $l\geqslant 2$ 时,我们有

(54) $$\frac{d}{dx}\left(e^{-(1-N_l(x))}/x\right)=\frac{(xN'_l(x)-1)}{x^2}e^{-(1-N_l(x))},\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

因此,欲证引理只须证明

(55) $$xN'_l(x)<1,\qquad 0<x<1.$$

现在用归纳法证明(55),当 $l=2$ 时,由定义,$N_2(x)=A_2(x)$ ,由引理 K 知 (55) 对 $l=2$ 成立.

假定(55) 对 $l=2,\cdots,l$ 成立. 则

(56) $$xN'_{l+1}(x)=x\frac{d}{dx}N_l(A_{l+1}(x))$$

$$=x\frac{d}{dy}N_l(y)\Big|_{y=A_{l+1}(x)}A'_{l+1}(x)$$

$$= A_{l+1}(x)\frac{d}{dy}N_l(y)\Big|_{y=A_{l+1}(x)}\frac{xA'_{l+1}(x)}{A_{l+1}(x)}.$$

由引理 K

$$\text{(57)}\qquad \frac{xA'_{l+1}(x)}{A_{l+1}(x)} < 1, \qquad 0 < x < 1.$$

而由归纳法假定(55) 对 $l$ 成立，故

$$\text{(58)}\qquad A_{l+1}(x)\frac{d}{dy}N_l(y)\Big|_{y=A_{l+1}(x)} < 1, \qquad 0 < x < 1.$$

将 (57) 代入 (58) 得

$$xN'_{l+1}(x) < 1, \qquad 0 < x < 1 .$$

从而 (55) 对一切 $l$ 成立. #

**引理 M**

$$\text{(59)}\qquad x + \int_{A_{l+1}(x)}^{1}\frac{e^{-(1-N_l(s))}}{s^2}ds = \frac{e^{-(1-N_{l+1}(x))}}{A_{l+1}(x)},$$

$$l \in N, 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

**证**：利用分步积分法得

$$\text{(60)}\ \int_{A_{l+1}(x)}^{1}\frac{e^{-(1-N_l(s))}}{s^2}ds = \int_{A_{l+1}(x)}^{1} -e^{-(1-N_l(s))}d\frac{1}{s}$$

$$= -1 + \frac{e^{-(1-N_l(A_{l+1}(x)))}}{A_{l+1}(x)} + \int_{A_{l+1}(x)}^{1}\frac{e^{-(1-N_l(s))}}{s}N'_l(s)ds.$$

由定义

$$\text{(61)}\qquad N_l(A_{l+1}(x)) = N_{l+1}(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

由引理 G

$$\text{(62)}\qquad e^{-(1-N_l(s))}N'_l(s) = A_l(s), \qquad 0 \leqslant s \leqslant 1.$$

将 (61),(62) 代入(60) 得

$$\int_{A_{l+1}(x)}^{1} \frac{e^{-(1-N_l(s))}}{s^2}ds$$

$$= -1 + \frac{e^{-(1-N_{l+1}(x))}}{A_{l+1}(x)} + \int_{A_{l+1}(x)}^{1} \frac{A_l(s)}{s}ds$$

$$= \frac{e^{-(1-N_{l+1}(x))}}{A_{l+1}(x)} - x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

从而得(59)　#

下面的定理是我们的主要结果.

**定理** Ⅵ

对任意 $l \in N$，我们有

(63)
$$e^{-(1-N_l(\cdot))} \in \mathscr{R}_\infty.$$

**证**：当 $l=1$ 时，因为 $N_1(x)=x$，此时(63) 即定理 Ⅴ.

现在我们用归纳法证明 (63) 对一切 $l$ 都成立. 假定 (63) 对 $l$ 成立，我们将证(63) 对 $l+1$ 亦成立.

设 $p \in \mathscr{P}$. $0=s_0<s_1<s_2$. 并记

(64)
$$\alpha = p(s_1) \quad , \quad \beta = p(s_2 - s_1)$$

首先假定 $\alpha \geqslant \beta$.

对任意自然数 $n \geqslant 2$，由于标准 $p$- 函数的连续性，我们可取

$$s_1 = t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1} = s_2.$$

使得（注意 $p(s_1)=p(t_1)=\alpha \geqslant \beta = p(t_{n+1}-t_1)=p(s_2-s_1)$啊

(65)
$$\beta_{n+1-i} = p(t_{n+1} - t_i) = \frac{(i-2)+(n+1-i)A_{l+1}(\alpha)}{n-1},$$
$$2 \leqslant i \leqslant n.$$

于是若令 $\beta_0 = 1$，则

(66)
$$\Delta\beta_j = \beta_j - \beta_{j+1} = \frac{1}{n-1}(1 - A_{l+1}(\alpha)), \quad 0 \leqslant j \leqslant n-1.$$

并且

$$\beta_{n-1} < \beta_{n-2} < \cdots < \beta_1 < \beta_0 = 1. \tag{67}$$

现在由归纳法假定 $e^{-(1-N_l(\cdot))} \in \mathscr{R}_\infty$. 由 §3 的引理得

$$\frac{1-p(t_{n+1})}{p(t_{n+1}-t_2)} \geqslant p(t_1)\left(1-\frac{p(t_{n+1}-t_1)}{p(t_{n+1}-t_2)}\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{p(t_{n+1}-t_{n+1-k})}{p(t_{n+1}-t_{n+1-k+1})}\right)\frac{e^{-(1-N_l(p(t_{n+1}-t_{n+1-k})))}}{p(t_{n+1}-t_{n+1-k})} \tag{68}$$

即

$$\frac{1-p(t_{n+1})}{p(t_{n+1}-t_2)} \geqslant p(t_1)\left(1-\frac{p(t_{n+1}-t_1)}{p(t_{n+1}-t_2)}\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{\beta_k}{\beta_{k-1}}\right)\frac{e^{-(1-N_l(\beta_k))}}{\beta_k}. \tag{69}$$

注意 $p(t_1)=p(s_1)=\alpha$, $p(t_{n+1}-t_2)=\beta_{n-1}$, (69)成为

$$1-p(t_{n+1}) \geqslant -p(t_1)p(t_{n+1}-t_1) + \beta_{n-1}\left(\alpha+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{e^{-(1-N_l(\beta_k))}}{\beta_k\beta_{k-1}}\Delta\beta_k\right) \tag{70}$$

由引理 L 得

$$\frac{e^{-(1-N_l(\beta_{k-1}))}}{(\beta_{k-1})^2} \leqslant \frac{e^{-(1-N_l(\beta_k))}}{\beta_k\beta_{k-1}} \leqslant \frac{e^{-(1-N_l(\beta_k))}}{(\beta_k)^2}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

现在注意 $\beta_{n-1}=A_{l+1}(\alpha)$，将满足条件(66)的分点数目加大，以至令 $n\to\infty$，由(70) 得

$$1-p(t_{n+1}) \geqslant -p(t_1)p(t_{n+1}-t_1) + A_{l+1}(\alpha)\left(\alpha+\int_{A_{l+1}(\alpha)}^{1}\frac{e^{-(1-N_l(s))}}{s^2}ds\right).$$

再由引理 M，我们得

$$1-p(t_{n+1}) \geqslant -p(t_1)p(t_{n+1}-t_1)+e^{-(1-N_{l+1}(\alpha))} \tag{71}$$

现以 $t_{n+1}=s_2$, $t_1=s_1$ 代入(71) 得

$$1-p(s_2) \geqslant -p(s_1)p(s_2-s_1)+e^{-(1-N_{l+1}(p(s_1)))}. \tag{72}$$

结论 (72) 是在 $\alpha=p(s_1)\geqslant p(s_2-s_1)=\beta$ 的条件下得到的. 如果 $\alpha<\beta$,则在(72)中将 $s_1$ 与 $s_2-s_1$ 的位置交换就得

$$(73)\qquad \begin{aligned} 1-p(s_2) &\geqslant -p(s_1)p(s_2-s_1)+e^{-(1-N_{l+1}(p(s_2-s_1)))} \\ &\geqslant -p(s_1)p(s_2-s_1)+e^{-(1-N_{l+1}(p(s_1)))}. \end{aligned}$$

最后的不等式是因为 $e^{-(1-x)}$ 与 $N_{l+1}(x)$ 都是 $x$ 的递增函数.

所以对任意 $1\leqslant s_1\leqslant s_2$,(72) 成立. 由定义(1) 式知

$$e^{-(1-N_l(\cdot))}\in\mathscr{R}_\infty.$$

从而对一切 $l\in N$ ,(63) 成立。 #

下面的几个结论都是定理 VI 的直接推论. 然而这些结论正是我们所需要的基本结果,因此将它们写成定理的形式.

**定理VI**

$$(74)\qquad e^{-(1-N(\cdot))}\in\mathscr{R}_\infty.$$

**证**:由定理 VI 知,对任意 $l\in N$ 任意 $p\in\mathscr{P}$ ,以及$0\leqslant s_1\leqslant s_2$有

$$1-p(s_2)\geqslant e^{-(1-N_l(p(s_1)))}-p(s_1)p(s_2-s_1).$$

令 $l\to\infty$ ,由于 $N_l(x)\to N(x)\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$ ,得

$$1-p(s_2)\geqslant e^{-(1-N(p(s_1)))}-p(s_1)p(s_2-s_1).$$

从而有(74). #

但是因为 $N(x)=1+\log\dfrac{1+x^2}{2}$ (引理 J) ,故

$$(75)\qquad e^{-(1-N(x))}=\frac{1+x^2}{2},\qquad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

所以 (74) 又可写成

$$(76)\qquad G\in\mathscr{R}_\infty,\text{其中 } G(x)=\frac{1+x^2}{2},\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

**定理VII**

对任意 $p\in\mathscr{P}$ ,我们有

(77) $$p(s_2) \leqslant \frac{1 + p^2(s_1)}{2}, \qquad 0 \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant \infty.$$

**证**:令 $G(x) = \dfrac{1 + x^2}{2}$,由 (76) $G \in \mathscr{R}_\infty$,显然有

(78) $$G(y) - G(x) = \frac{1}{2}(y^2 - x^2) \geqslant x(y - x),$$

$$0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1.$$

因此由引理 A,有

(79) $$1 - p(s_2) \geqslant \frac{1}{2}(1 + p^2(s_1)) - p^2(s_1), \qquad 0 \leqslant s_1 \leqslant s_2.$$

由 (79) 立即得(77). #

**定理 IX**

当 $M \geqslant \dfrac{1}{2}$,我们有

(80) $$I_\infty(M) \geqslant \sqrt{2M - 1}$$

其中 $I_\infty(\cdot)$ 的定义见 §1(12).

**证**:由定义

(81) $$I_\infty(M) = \inf(p(t); p \in \mathscr{P}, p(1) = M, 0 \leqslant t \leqslant 1),$$

但由定理 VIII,对任意 $p \in \mathscr{P}$, $p(1) = M$,有

$$M = p(1) \leqslant \frac{1 + p^2(t)}{2}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

从而由 (81) 易得(80). #

下面的定理是本章的最后一个结果,也是应用 Kingman 不等式理论解决 Davidson 问题目前所获得的最好结果.

**定理** Ⅹ

(82) $$\frac{1}{e} \leqslant v_\infty \leqslant \frac{1}{2}$$

其中 $v_\infty$的定义见§1(20).

**证**:由定义

$$v_\infty = \inf(M: I_\infty(M) > 0).$$

但是由定理Ⅸ,当 $M > \frac{1}{2}$ 时,$I_\infty(M) > 0$,从而 $v_\infty \leqslant \frac{1}{2}$. 至于$v_\infty \geqslant \frac{1}{e}$,则是定理 Ⅰ 的结论. #

## §5 问题

问题 Ⅰ

在§3我们已经指出,$\mathscr{R}_2 \subset \mathscr{R}_3 \subset \cdots \subset \mathscr{R}_\infty$. 但是除了恒等函数 $I(x) \equiv x \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$ 属于 $\mathscr{R}_n (n \in N)$ 以外,还不知道是否有另外的 $G(x) \in \mathscr{R}_n$. 当然 $G$ 应满足条件 $G(x) \geqslant x \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$.

猜测:$\mathscr{R}_2 = \{I(x): 0 \leqslant x \leqslant 1\}$,即$\mathscr{R}_2$除了恒等函数以外,没有别的函数了.

问题 Ⅱ

本章定理Ⅷ 肯定不是最好的结果. 事实上,在本书第七章我们将用别的方法证明:对任意 $P \in \mathscr{P}$ 必有

(1) $$p(t) \leqslant p(s) + 1/e, \qquad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \infty.$$

由(1) 可以推出 $v_\infty = 1/e$.

现在提出的问题是：能否应用 Kingman 不等式的理论证明(1). 从理论上讲，$\mathscr{P}$ 中每个元素都是由 Kingman 不等式唯一确定的. 因此，应用 Kingman 不等式理论证明(1) 应该是完全可行的. 但是目前没有找到应用 Kingman 不等式的具体方法证明(1).

## 注释

$(m,M)$ 图问题与 Davidson 问题都是 Davidson 提出的，其问题与定理 I 见 Davidson(1968,1969).

定理 I 由 Blackwell and Freedman (1968) 与 Davidson(1968) 同时独立地得到. 定理 II 是 Davidson and Kendall (1973)的结果.

§3的引理、定理 IV 与 §4 的定理 V 主要是 Joshi(1975, 1977a) 的工作.

§4引理 A 是新结果，是首次发表. 应用这一引理可以简化定理的某些证明.

§4引理 B 至引理 M 见 Yu Yao-qi(1984). 定理 IV 是 Yu Yao-qi 的主要结果.

关于 $v_\infty$的研究历史可见本书的引论.

定理 VI 至 X 是 Dai Yong long (1987) 与 Zou Jiezhong 独立地获得的. 这些结果简化了 Zou Jiezhong (1986)对 $v_\infty\leqslant\frac{1}{2}$ 的原始证明.

直至目前为止，用 Davidson 不等式理论研究 $v_\infty$，最好的结果也就是 $v_\infty\leqslant\frac{1}{2}$ .

在后面五、六、七章里将用完全不同的方法研究 $v_\infty$. 最后终于完全证明了 Davidson 关于 $v_\infty=\frac{1}{e}$的猜测.

# 第五章　标准 $p$-函数的最大值问题

## §1　退化 $p$-函数

### 1. 定义

我们在这一章只考虑稳定的标准 $p$-函数. 但在最后一节将说明,本章的主要结果对非稳定的标准 $p$- 函数也成立.

设 $\lambda\in\Lambda_l$. 对任意 $0\leqslant\tau\leqslant\infty$ ,令

$$(1)\qquad {}_\tau\lambda(A)=\lambda(A\cap(0,\tau))+(1-\lambda((0,\tau)))\delta_\infty(A),\qquad A\in\mathscr{B}[0,\infty].$$

其中 $\delta_\infty$是点 $\infty$ 处的单点测度. (1)式表明, ${}_\tau\lambda$ 是将 $\lambda$ 在 $[\tau,\infty]$ 内的测度集中放到点 $\infty$ 处而得到的. 显然 ${}_\tau\lambda\in\Lambda_l$. 不妨称 ${}_\tau\lambda$ 是 $\lambda$ 的退化分布.

现设 $0<q<\infty$ , $p\in\mathscr{P}^*(q)$, $p\sim\lambda\in\Lambda_l$. 由于 $\mathscr{P}^*(q)$ 与 $\Lambda_l$ 是一一对应的. 因此对任意 $0<\tau<\infty$, 存在 ${}_\tau p\in\mathscr{P}^*(q)$使 ${}_\tau p\sim{}_\tau\lambda$. 我们称 ${}_\tau p$ 是 $p$ 的退化 $p$- 函数.

为了叙述简明,今后说 $p\in\mathscr{P}^*(q)$ ,恒假定 $0<q<\infty$ ,而不再一一注明. 同样 ${}_\tau p$ , ${}_\tau\lambda$ 也不再一一注明 $0<\tau<\infty$.

由(1) 看出,如果 $\lambda\in\Lambda_l$, $0<\tau\leqslant\rho<\infty$. 则

$$(2)\qquad {}_\tau\lambda={}_\tau({}_\rho\lambda)={}_\rho({}_\tau\lambda).$$

从而若 $p\sim\lambda$ 则

(3) $${}_\tau p = {}_\tau({}_\rho p) = {}_\rho({}_\tau p).$$

## 2. 表达式

由第三章定理Ⅵ的推论2，若 $p \in \mathscr{P}^*(q)$，则对任意 $0 < \tau < \infty$ 有

(4) $$p(t) = {}_\tau p(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant \tau.$$

为了叙述本章所要研究的问题，我们需要 $p - {}_\tau p$ 在区间 $[\tau, 2\tau]$ 的一个表达式.

**定理** Ⅰ

设 $p \in \mathscr{P}^*(q)$，$p \sim \lambda \in \Lambda_f$. 则对任意 $0 < \tau < \infty$，当 $\tau \leqslant t \leqslant 2\tau$ 时，有

(5) $$p(t) - {}_\tau p(t) = \int_{[\tau,t)} q(t-x) e^{-q(t-x)} \lambda(dx)$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \int_{[\tau,t)} \int_0^{t-x} \frac{q^n (t-x-y)^n}{(n-1)!} e^{-q(t-x-y)} \quad {}_\tau\lambda^{(n-1)}(dy) \lambda(dx).$$

其中 ${}_\tau\lambda^{(n-1)}$ 是 ${}_\tau\lambda$ 的 $(n-1)$ 次卷积.

**证**：由第三章§6的(12)我们有

(6) $$p(t) = e^{-qt} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \frac{q^n (t-s)^n}{n!} e^{-q(t-s)} \lambda^{(n)}(ds), \quad t \in \overline{R}.$$

(7) $${}_\tau p(t) = e^{-qt} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \frac{q^n (t-s)^n}{n!} e^{-q(t-s)} {}_\tau\lambda^{(n)}(ds),$$
$$t \in \overline{R}.$$

因此得

(8) $$p(t) - {}_\tau p(t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t \frac{q^n(t-s)^n}{n!}e^{-q(t-s)}(\lambda^{(n)} - {}_\tau\lambda^{(n)})(ds), \qquad t \in \bar{R}.$$

然而我们有

$$\lambda((0,t)) = {}_\tau\lambda((0,t)) + (\lambda - {}_\tau\lambda)((0,t)), \qquad t \in \bar{R}.$$

为计算(8) 式右边，我们将用到卷积的一般公式

$$\lambda^{(n)} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}{}_\tau\lambda^{(j)} \star (\lambda - {}_\tau\lambda)^{(n-j)}. \tag{9}$$

由 ${}_\tau\lambda$ 的定义，立即得到下列诸式：

$$(\lambda - {}_\tau\lambda)(A) = 0, (\lambda - {}_\tau\lambda) \star {}_\tau\lambda^{(k)}(A) = 0, \tag{10}$$

$$A \in \mathscr{B}(0,\tau), k \in N.$$

$$(\lambda - {}_\tau\lambda)(A) = \lambda(A), \qquad A \in \mathscr{B}[\tau, 2\tau). \tag{11}$$

$$(\lambda - {}_\tau\lambda)^{(k)}(A) = 0, \qquad A \in \mathscr{B}(0,2\tau), k \geqslant 2. \tag{12}$$

$$((\lambda - {}_\tau\lambda)^{(k)} \star {}_\tau\lambda^{(l)})(A) = 0, A \in \mathscr{B}(0,2\tau), k \geqslant 2, l \geqslant 0. \tag{13}$$

其中 $\mathscr{B}(0,\tau)$，$\mathscr{B}[\tau,2\tau)$，$\mathscr{B}(0,2\tau)$ 分别表示 $(0,\tau)$，$[\tau,2\tau)$ 与 $(0,2\tau)$中的全体 Borel 集. 由(9) 至(13) 得

$$(\lambda^{(n)} - {}_\tau\lambda^{(n)})(A) = n{}_\tau\lambda^{(n-1)} \star (\lambda - {}_\tau\lambda)(A) \tag{14}$$

$$= (n{}_\tau\lambda^{(n-1)} \star \lambda)(A),$$

$$A \in \mathscr{B}(0,2\tau), n \geqslant 2.$$

将 (14) 代入(8) 得

$$p(t) - {}_\tau p(t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\int_0^t \frac{q^n(t-s)^n}{n!}e^{-q(t-s)}{}_\tau\lambda^{(n-1)} \star (\lambda - {}_\tau\lambda)(ds)$$

$$= \int_0^t q(t-s)e^{-q(t-s)}(\lambda - {}_\tau\lambda)(ds)$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty}\int_0^t \frac{q^n(t-s)^n}{(n-1)!}e^{-q(t-s)}{}_\tau\lambda^{(n-1)} \star (\lambda - {}_\tau\lambda)(ds)$$

$$-\int_{[\tau,t)} q(t-x)e^{-q(t-x)}\lambda(dx)$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\int_{[\tau,t)}\int_0^{t-x}\frac{q^n(t-x-y)^n}{(n-1)!}e^{-q(t-x-y)}\ {}_\tau\lambda^{(n-1)}(dy)\lambda(dx),$$

$$\tau\leqslant t\leqslant 2\tau. \qquad \#$$

为了简化记号，对任意 $\lambda\in\Lambda_l$，令

$$f(\lambda,\eta)=q\eta e^{-q\eta}+\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^{\eta}\frac{q^n(\eta-y)^n}{(n-1)!}e^{-q(\eta-y)}\lambda^{(n-1)}(dy),\quad \eta\geqslant 0. \tag{15}$$

则 (8)式可写成

$$p(t)-{}_\tau p(t)=\int_{[\tau,t)} f({}_\tau\lambda,t-x)\lambda(dx),\quad \tau\leqslant t\leqslant 2\tau. \tag{16}$$

我们还需要 $p-{}_\tau p$ 在区间$[2\tau,3\tau]$ 的一个表达式.

**定理 I**

设 $p\in\mathscr{P}^*(q)$，$\lambda\in\Lambda_l$，$p\sim\lambda$. 则对任意 $0<\tau<\infty$，有

$$p(t)-{}_\tau p(t)=\int_{[\tau,t)} f({}_\tau\lambda,t-x)\lambda(dx) \tag{17}$$

$$+\frac{1}{2}\int_{[2\tau,t)} q^2(t-x)^2 e^{-q(t-x)}(\lambda-{}_\tau\lambda)^{(2)}(dx)$$

$$+\sum_{n=3}^{\infty}\int_{[2\tau,t)}\int_0^{t-x}A_n(x,y)\ {}_\tau\lambda^{(n-2)}(dy)(\lambda-{}_\tau\lambda)^{(2)}(dx),$$

$$2\tau\leqslant t\leqslant 3\tau.$$

其中 $f({}_\tau\lambda,\eta)(\eta\geqslant 0)$ 由(15)式定义，而

$$A_n(x,y)=\frac{q^n(t-x-y)^n}{2(n-2)!}e^{-q(t-x-y)}.$$

**证**：定理 I 的证明与定理 I 的证明相比. 只是多了一些项而已，

从略. #

如果我们令

$$(18)\qquad g(\lambda,\xi)=\frac{1}{2}q^2\xi^2e^{-q\xi}+\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\int_0^{\xi}\frac{q^n(\xi-y)^n}{(n-2)!}e^{-q(\xi-y)}\lambda^{(n-2)}(d\xi),$$

$$\lambda\in\Lambda_l,\xi\geqslant 0.$$

则 (17) 式可以写成

$$(19)\qquad p(t)-{}_\tau p(t)=\int_{[\tau,t)}f({}_\tau\lambda,t-x)\lambda(dx)+\int_{[2\tau,t)}g({}_\tau\lambda,t-x)(\lambda-{}_\tau\lambda)^{(2)}(dx),$$

$$2\tau\leqslant t\leqslant 3\tau.$$

下述引理给出了由(15) 定义的 $f(\cdot,\cdot)$ 的几个性质. 今后将常常用到.

**引理 A**

设 $\lambda\in\Lambda_l$, $0<q<\infty$. 则由(15) 定义的 $f$ 有如下性质：

A. $f(\lambda,0)=0$

B. 当 $\eta>0$, $f(\lambda,\eta)>0$.

C. 若 $\lambda((0,\tau))<1$, $\tau\leqslant h<\infty$, 令

$$(20)\qquad \bar\lambda(A)={}_\tau\lambda(A)+(1-\lambda((0,\tau)))\delta_h(A),$$

$$A\in\mathscr{B}(0,\infty].$$

则 $\bar\lambda\in\Lambda_l$, 又若 $\bar p\in\mathscr{P}^*(q)$ 使 $\bar p\sim\bar\lambda$, 则

$$(21)\qquad \bar p(t)-{}_\tau p(t)=(1-\lambda((0,\tau)))f({}_\tau\lambda,t-h),$$

$$h\leqslant t\leqslant 2h.$$

D. 如果 $\lambda(0,\tau)<1$, 则 $f({}_\tau\lambda,\eta)$ 是 $\eta$ 在 $\bar R$ 上的连续函数.

**证**：A 与 B 由定义直接得到，现证 C. 由(20) 定义的 $\tilde{\lambda} \in \Lambda_\tau$，是显然的. 因此只须证(21). 由定义易见 ${}_h\tilde{\lambda} = {}_\tau\lambda$，从而

$$(22) \qquad {}_h\tilde{p}(t) = {}_\tau p(t), \qquad t \in \overline{R}.$$

由(16)，(20) 得

$$(23) \qquad \tilde{p}(t) - {}_h\tilde{p}(t) = \int_{[h,t)} f({}_h\tilde{\lambda}, t - x)\tilde{\lambda}(dx),$$
$$= (1 - \lambda((0,\tau)))f({}_\tau\lambda, t - h),$$
$$h \leqslant t \leqslant 2h.$$

结合(22)，(23) 得(21).

现证 D. 因为(21) 左边是 $t$ 的连续函数，从而推知 $f({}_\tau\lambda, \eta)$ 在$[0,h)$是 $\eta$ 在的连续函数. 但是 $h \geqslant \tau$ 是任意取定的，从而$f({}_\tau\lambda, \eta)$ 是 $\eta$ 在 $\overline{R}$ 上的连续函数. #

类似地，对(18)定义的 $g$ 也有下述引理.

**引理 B**

设 $\lambda \in \Lambda_\tau$，$0 < q < \infty$. 则由(18) 定义的 $g$ 有性质：

A. $g(\lambda, 0) = 0$.

B. 若 $\xi > 0$，则 $g(\lambda, \xi) > 0$.

C. 如果 $\lambda((0,\tau)) < 1$，则 $G({}_\tau\lambda, \xi)$ 是 $\xi$ 在 $\overline{R}$ 上的连续函数.

**证**：只须证 C. 对 $h \geqslant \tau$ 如(20) 一样定义 $\tilde{\lambda}$，并取 $\tilde{p} \in p^*(q)$ 使 $\tilde{p} \sim \tilde{\lambda}$. 则由(19) 有

$$(24) \qquad \tilde{p}(t) - {}_\tau\tilde{p}(t) = (1 - \lambda((0,\tau)))f({}_\tau\lambda, t - h)$$
$$+ (1 - \lambda((0,\tau)))^2 g({}_\tau\lambda, t - 2h),$$
$$2h \leqslant t \leqslant 3h.$$

(24) 左边和右边第一项是 $t$ 在 $\bar{R}$ 上的连续函数，于是由 $1-\lambda((0,\tau))>0$ 推得 $g(\cdot,\lambda,\eta)$ 是 $\eta$ 在 $R$ 上的连续函数. #

## §2　本章的问题和主要结果

### 3. 问题及主要结果

现在叙述本章所要研究的主要问题.

任取 $p_0\in\mathscr{P}^*$. 于是存在 $0<q<\infty$，使 $p_0\in\mathscr{P}^*(q)$. 又设 $u>0$ 以 ${}_u\mathscr{P}(p_0)$ 记一切在 $[0,u]$ 上与 $p_0$ 重合的标准 $p$-函数. 设 $p\in{}_u\mathscr{P}(p_0)$，记 $\mathscr{L}(p)=\sup\limits_{t\geqslant u}p(t)$. 我们的主要问题是，当 $p$ 遍历 ${}_u\mathscr{P}(p_0)$ 时，寻求 $\mathscr{L}(\cdot)$ 的最小上界.

下面用精确的数学语言描述上述问题和获得的主要结果.

设 $p_0\in\mathscr{P}^*(q)$，$u>0$. 令

(1)　$${}_u\mathscr{P}(p_0)=(p\in\mathscr{P}^*(q):p(s)=p_0(s),0\leqslant s\leqslant u).$$

而对任意 $u\leqslant T\leqslant\infty$，令

(2)　$$L(p_0,u,T)=\sup\,(p(t):u\leqslant t\leqslant T,\ p\in{}_u\mathscr{P}(p_0)).$$

在上述定义中，$p_0$ 的定义域是 $\mathscr{P}^*$，$u$ 的定义域是 $R$. 而 $T$ 是在 $[u,\infty]$ 上定义的. 然而在一般的讨论中，我们都假定 $p_0$、$u$ 是固定的，今后，当把 $p_0,u$ 看成变元时，将会特别申明.

固定 $p_0,u$，则 $L(p_0,u,T)$ 显然是 $T$ 在 $[u,\infty]$ 上的不减函数. 正如我们在前面用文字所提到的，我们的主要目的是求 $L(p_0,u,\infty)$. 然而，本章后面将证明.

(3)　$$L(p_0,u,T)=L(p_0,u,3u),\qquad T\geqslant 3u.$$

因此，只要研究 $L(p_0,u,T)$ $(u\leqslant T\leqslant 3u)$ 就可以了. (3)是本章的主

要结果之一.

其次我们将给出 $L(p_0,u,T)$ 的一个明确的表达式.

设 $\lambda_0 \in \Lambda_I$ 且 $p_0 \sim \lambda_0, f(\lambda,\eta)$ 由 § 1 (15) 式所定义. 则本章的第二个主要结果是:

或者存在 $T^*$ 使 $u \leqslant T^* \leqslant 2u$ 且满足

$$L(p_0,u,T) < L(p_0,u,T^*), \qquad T < T^* \tag{4}$$

$$\begin{aligned} L(p_0,u,T) &= L(p_0,u,T^*) \\ &= {}_u p_0(T^*) + (1-\lambda_0((0,u))) \max_{u \leqslant s \leqslant T^*} f({}_u\lambda_0, T^*-s), \\ &\qquad\qquad T \geqslant T^*. \end{aligned} \tag{5}$$

或者存在 $T^*$ 使 $u < T^* < 2u$ 且

$$L(p_0,u,T) < L(p_0,u,T^*), \qquad T < T^*. \tag{6}$$

$$\begin{aligned} L(p_0,u,T) &= L(p_0,u,T^*) \\ &= {}_u p_0(T^*) + (1-\lambda_0((0,u))) \max_{T^*-u \leqslant s \leqslant T^*} f({}_u\lambda_0, T^*-s), \\ &\qquad\qquad T \geqslant T^*. \end{aligned} \tag{7}$$

## 4. 应用

在上述问题中,如果选取的 $p_0 \in \mathscr{P}^*(q)$ ,且 $p_0 \sim \lambda_0 \in \Lambda_I$ 满足

$$\lambda_0((0,u)) = 0. \tag{8}$$

则由第三章定理 XII 得

$$p_0(s) = e^{-qs}, \qquad 0 \leqslant s \leqslant u. \tag{9}$$

我们先对满足(9) 的 $p$- 函数给出一些记号.

令

$$\mathscr{P}(q,u) = (p \in \mathscr{P}^*(q) : p(s) = e^{-qs}, \quad 0 \leqslant s \leqslant u). \tag{10}$$

(11)
$$\mathscr{P}(u) = \bigcup_{0<q<\infty} \mathscr{P}(q,u).$$

(12)
$$\mathscr{P}^{**} = \bigcup_{0<u<\infty} \mathscr{P}(q,u).$$

一般称 $p\in\mathscr{P}^{**}$是指数开始的 $p$- 函数.

对于满足条件(8) 的 $\lambda\in\Lambda_l$,我们也给一个记号,即令

(13)
$$\Lambda_l(u) = (\lambda\in\Lambda_l, \lambda((0, u)) = 0).$$

显然, $\mathscr{P}(q,u)$ 与 $\Lambda_l(u)$ 是一一对应的.

作为本章主要结果的推论,后面将证明,当 $p_0\in\mathscr{P}(q,u)$ 时,必有

(14)
$$L(p_0,u,T) = L(p_0,u,2u) = e^{-(1-e^{-qu})}, \qquad T\geqslant 2u.$$

这一结果是 D. Griffeath 于 1976 年得到的.

## §3　若干引理

### 5. 一个测度论引理

证明 §2 所提到的结果不是一件简单的事情. 需要通过一系列的准备工作才能达到这一目的. §1 所述的两个定理其实已经是准备工作了. 由于它们给出了 $p\to{}_tp$ 的一个可供计算的表达式,因而作为独立的结果予以表述. 下面所证明的一系列引理则完全是为了证明 §2 所述的结果而设计的.

首先给出一个完全是测度论的引理.

**引理 A**

设 $u>0$. 以 $\mathscr{M}$ 记一切在$[u,\infty]$ 上满足下述条件的测度集:

$\lambda\in\mathscr{M}$，则 $\lambda([u,3u])=c, c>0$ 是常数.

又设 $f(\cdot), g(\cdot)$ 是定义在 $[u,3u]$ 上的非负连续函数.

则对任意 $\lambda\in\mathscr{M}$ 及 $T\in(2u,3u]$，或者有

$$\int_{[u,T)} f(x)\lambda(dx)+\int_{[2u,T)} g(x)\lambda^{(2)}(dx) \leqslant c\max_{T-u\leqslant x\leqslant T} f(x) \tag{1}$$

或者存在 $\bar{\lambda}\in\mathscr{M}$ 满足条件：

$$\bar{\lambda}([T-u,T))=0. \tag{2}$$

且

$$\int_{[u,T)} f(x)\bar{\lambda}(dx)+\int_{[2u,T)} g(x)\bar{\lambda}^{(2)}(dx) \geqslant \int_{[u,T)} f(x)\lambda(dx)+\int_{[2u,T)} g(x)\lambda^{(2)}(dx). \tag{3}$$

其中 $\lambda^{(2)}$ 及 $\bar{\lambda}^{(2)}$ 分别是 $\lambda$ 及 $\bar{\lambda}$ 的二次卷积.

证：假定(1)不成立，即

$$\int_{[u,T)} f(x)\lambda(dx)+\int_{[2u,T)} g(x)\lambda^{(2)}(dx) > c\max_{T-u\leqslant x\leqslant T} f(x). \tag{4}$$

此时必有 $\lambda([u,T-u))>0$. 因为如果 $\lambda([u,T-u))=0$，则由卷积的定义和 $2(T-u)>T$ 推出 $\lambda^{(2)}([2u,T))=0$. 从而(4)的左边将成为

$$\int_{[u,T)} f(x)\lambda(dx) = \int_{[T-u,T)} f(x)\lambda(dx) \leqslant c\max_{T-u\leqslant x\leqslant T} f(x).$$

此与(4)式矛盾. 于是若(4)成立，则 $\lambda([u,T-u))>0$. 现令

$$\bar{\lambda}(A) = \frac{c}{\lambda([u,T-u))}\lambda(A \cap [u,T-u)), \tag{5}$$

$$A \in \mathscr{B}[u,\infty].$$

则 $\bar{\lambda}$ 是$[u,\infty]$ 上的测度，且 $\bar{\lambda}([u,3u])=c$ ，故 $\bar{\lambda}\in\mathscr{M}$ . 由 (5) 易见 $\bar{\lambda}([T-u,T])=0$. 从而条件(2) 成立. 现证条件(3)亦成立. 事实上，我们有

$$\int_{[u,T)} f(x)\bar{\lambda}(dx) + \int_{[2u,T)} g(x)\bar{\lambda}^{(2)}(dx)$$

$$= \int_{[u,T-u)} f(x)\bar{\lambda}(dx) + \int_{[2u,T)} g(x)\bar{\lambda}^{(2)}(dx)$$

$$= \frac{c}{\lambda([u,T-u))}\int_{[u,T-u)} f(x)\lambda(dx)$$

$$+ \left(\frac{c}{\lambda([u,T-u))}\right)^2 \int_{[2u,T)} g(x)\lambda^{(2)}(dx)$$

$$\geqslant \frac{c}{\lambda([u,T-u))}$$

$$\times \left( \int_{[u,T)} f(x)\lambda(dx) + \int_{[2u,T)} g(x)\lambda^{(2)}(dx) - \int_{[T-u,T)} f(x)\lambda(dx) \right)$$

$$\geqslant \frac{c}{\lambda([u,T-u))}\left( \int_{[u,T)} f(x)\lambda(dx) \right.$$

$$\left. + \int_{[2u,T)} g(x)\lambda^{(2)}(dx) - \lambda([T-u,u)) \max_{T-u\leqslant x\leqslant T} f(x) \right)$$

由 (4) ，上式

$$\geqslant \frac{c}{\lambda([u,T-u))}\left(1 - \frac{\lambda([T-u,T))}{c}\right)$$

$$\times \left( \int_{[u,T)} f(x)\lambda(dx) + \int_{[2u,T)} g(x)\lambda^{(2)}(dx) \right)$$

$$\geqslant \frac{c}{\lambda([u,T-u))}\left(1 - \frac{\lambda([T-u,3u]))}{c}\right)$$

$$\times \left( \int_{[u,T)} f(x)\lambda(dx) + \int_{[2u,T)} g(x)\lambda^{(2)}(dx) \right)$$

$$= \int_{[u,T)} f(x)\lambda(dx) + \int_{[2u,T)} g(x)\lambda^{(2)}(dx).$$

从而 (3) 成立　#

6. 关于 $\mathscr{P}^*(q)$的引理

**引理** B

设 $p,\tilde{p}\in\mathscr{P}^*(q)$，$\lambda,\tilde{\lambda}\in\Lambda_l$，且 $p\sim\lambda,\tilde{p}\sim\tilde{\lambda}$. 如果存在 $0<T<\infty$ 使

(6)　$\lambda(A)\leqslant\tilde{\lambda}(A), A\in\mathscr{B}(0,T)$ 且 $\lambda(0,T)<\tilde{\lambda}((0,T))$.

则 $p(T)<\tilde{p}(T)$ 且 $p(s)\leqslant\tilde{p}(s)$　$(0\leqslant s\leqslant T)$ .

**证**：由于(6)，$(\tilde{\lambda}-\lambda)$ 是$(0,T)$ 内的测度，且

$$\tilde{\lambda}(A)=\lambda(A)+(\tilde{\lambda}-\lambda)(A),\qquad A\in\mathscr{B}(0,T).$$

从而当 $n\geqslant 2$ ，由 §1(9) 式知

$$\tilde{\lambda}^{(n)}(A)\geqslant\lambda^{(n)}(A),\qquad A\in\mathscr{B}(0,T).$$

由第三章 §6 (12)式知

$$\tilde{p}(T)-p(T)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T\frac{q^n(T-s)^n}{n!}e^{-q(T-s)}(\tilde{\lambda}^{(n)}-\lambda^{(n)})(ds)$$

$$\geqslant\int_0^T q(T-s)e^{-q(T-s)}(\tilde{\lambda}-\lambda)(ds)>0.$$

而 $p(s)\leqslant\tilde{p}(s)$　$(0\leqslant s<T)$ 是显然的.　#

**引理** C

设 $p\in\mathscr{P}^*(q)$，$p\sim\lambda\in\Lambda_l$. 如果存在实数 $S,T$ ，使得$0<S<2S$

$\leqslant T<\infty$ 和 $\lambda([S,T])=0$，则存在实数 $\tau$ 使得

(7) $$T-S\leqslant\tau<T,\quad 且\quad p(\tau)\geqslant p(T).$$

**证**：由第三章定理Ⅻ 知

(8) $$D_+p(T)=-q\left\{p(T)-\int_{(0,T]}p(T-s)\lambda(ds)\right\}.$$

如果 $p(T)<\max\limits_{T-S\leqslant h\leqslant T}p(h)$，则显然存在 $\tau$ 满足(7) 式.

如果 $p(T)\geqslant\max\limits_{T-S\leqslant h\leqslant T}p(h)$，则 $p$ 在 $T$ 点的左导数 $D_-p(T)\geqslant0$. 由第三章定理Ⅷ 知，$D_+p(T)\geqslant D_-p(T)\geqslant0$. 由(8) 得

$$\begin{aligned}p(T)&\leqslant\int_{(0,T]}p(T-s)\lambda(ds)\\&=\int_{(0,S)}p(T-s)\lambda(ds).\end{aligned}$$

其中用到条件 $\lambda([S,T])=0$. 由此式易知存在 $\tau$ 使(7) 成立. #

## 7. 关于 $L(p_0,u,T)$ 的引理

现设 $p_0\in\mathscr{P}^*(q)$，$\lambda_0\in\Lambda_l$ 且 $P_0\sim\lambda_0$. 又设 $u>0$. 在§2 的(1)、(2) 式已经定义了 $\mathscr{P}(p_0)$ 及 $L(p_0,u,T)$ $(T\geqslant u)$.

如果 $p\in\mathscr{P}(p_0)$ 且 $p\sim\lambda\in\Lambda_l$. 则因 $p(s)=p_0(s)$ $(0\leqslant s\leqslant u)$，从而由第二章定理Ⅶ 的推论 2，必有

(9) $$\lambda((0,s))=\lambda_0((0,s)),\qquad 0\leqslant s\leqslant u.$$

即 $\lambda$ 与 $\lambda_0$ 在$(0,u)$ 上的限制相等.

下述引理指出，在第三章§2 所定义的 C- 收敛意义下，$\mathscr{P}(p_0)$具有紧集的性质.

**引理 D**

设 $(p_n, n\in N)\subset {}_u\mathscr{P}(p_0)$，则存在子列 $(p_{n_k}, k\in N)$ 及 $\bar{p}\in {}_u\mathscr{P}(p_0)$ 使

$$p_{n_k}\overset{C}{\Rightarrow}\bar{p}. \tag{10}$$

**证**：由于 $p_0\in\mathscr{P}^*(q)$，故 $-p'(0)=q$. 因此对任意 $p\in {}_u\mathscr{P}(p_0)$ 都有 $-p'(0)=q$，从而由第三章§6 (2)式得

$$|p(t)-p(s)|\leqslant q|t-s|,\qquad s,t\in\overline{R}\text{ 且 }p\in {}_u\mathscr{P}(p_0). \tag{11}$$

换言之，${}_u\mathscr{P}(p_0)$ 在 $\overline{R}$ 上均匀一致连续.

以 $Q$ 记 $\overline{R}$ 上全体有理数，在序列 $(p_n, n\in N)$ 中选取子序列 $(p_{n_k}, k\in N)$ 使得它在 $Q$ 上逐点收敛于函数 $\bar{p}(r), r\in Q$.

$$\lim_{k\to\infty}p_{n_k}(r)=\bar{p}(r),\qquad r\in Q. \tag{12}$$

由于均匀一致连续性，易知上述收敛性可以扩展到整个 $R$ 上，从而 $\bar{p}$ 也扩张到 $\overline{R}$ 上. 显然，$\bar{p}\in {}_u\mathscr{P}(p_0)$.　　#

下述引理指出，上确界 $L(p_0,u,T)$ 是可以达到的.

**引理 E**

存在 $p\in {}_u\mathscr{P}(p_0)$ 及 $\overline{T}, u\leqslant\overline{T}\leqslant T$ 使

$$p(\overline{T})=L(p_0,u,T). \tag{13}$$

**证**：选取 $(p_n, n\in N)\subset {}_u\mathscr{P}(p_0)$ 和序列 $(t_n, n\in N)$ 使得

$$u\leqslant t_n\leqslant T,\quad L(p_0,u,T)-p_n(t_n)\leqslant\frac{1}{n},\qquad n\in N.$$

由引理 D，存在子列 $(p_{n_k}, k\in N)$ 及 $p\in {}_u\mathscr{P}(p_0)$ 使得

$$p_{n_k} \overset{c}{\Rightarrow} p.$$

任取序列 $(t_n, n\in N)$ 的极限点 $\overline{T}$，则显然有

$$p(\overline{T}) = \sum_{k\to\infty} p_{n_k}(\overline{T}) = L(p_0,u,T). \qquad \#$$

**引理 F**

$L(p_0,u,T)$ 是 $T$ 在 $[0,\infty)$ 上的连续函数.

证：从 $L(p_0,u,T)$ 的定义推知，$L(p_0,u,T)$ 是 $T$ 在 $[u,\infty)$ 的不减函数. 又因为对任意 $p\in\mathscr{P}^*(q)$ 有

$$|p(t)-p(s)|\leqslant q|t-s|,$$

从而由引理 E 得

$$L(p_0,u,T+h)-L(p_0,u,T)\leqslant qh, \qquad h>0,$$

从而 $L(p_0,u,\cdot)$ 是连续函数. #

**引理 G**

设 $p\in {}_u\mathscr{P}(p_0)$，$u\leqslant\overline{T}\leqslant T$，$p(\overline{T})=L(p_0,u,T)$ 和 $p\sim\lambda\in\Lambda_l$，则 $\lambda([\overline{T},\infty])=0$

证：在引理 E 中已经证明，存在 $p\in {}_u\mathscr{P}(p_0)$ 及 $T$ 使得

$$u\leqslant\overline{T}\leqslant T, \quad p(\overline{T})=L(p_0,u,T).$$

现设 $\overline{T}>u$. 如果 $\lambda([\overline{T},\infty])>0$，则令

$$\tilde{\lambda}(A)=\lambda(A\cap(0,\overline{T}))+\lambda([\overline{T},\infty])\delta_u(A), \tag{14}$$

$$A\in\mathscr{B}(0,\infty].$$

显然 $\tilde{\lambda}\in\Lambda_l$. 由于 $\overline{T}>u$，故 $\tilde{\lambda}([\overline{T},\infty])=0$. 从上述 $\tilde{\lambda}$ 的定义易见

$\lambda(A) \leqslant \bar{\lambda}(A), \quad A \in \mathscr{B}(0,\bar{T}]$，且 $\lambda((0,\bar{T})) < \bar{\lambda}((0,\bar{T}))$.
现令 $\bar{p} \sim \bar{\lambda}$，则 $\bar{p} \in {}_u\mathscr{P}(p_0)$. 则由引理 B 知 $p(\bar{T}) < \bar{p}(\bar{T})$. 此与 $p(\bar{T}) = L(p_0,u,T)$ 矛盾. 因此在引理的条件下，必须 $\lambda([\bar{T},\infty]) = 0$. #

在上述诸引理中，我们都假定 $p_0, u$ 是固定的. 其实根据定义，$L(p_0,u,T)$ 是 $p_0 \in \mathscr{P}^*, u \in R, T \geqslant u$ 的三元函数. 因此在下面的一些结果中，$p_0$ 和 $u$ 也允许在定义域中变动.

**引理 H**

设 $p \in {}_u\mathscr{P}(p_0)$，$u \leqslant \bar{T} \leqslant T$，$p(\bar{T}) = L(p_0,u,T)$. 则

$$L(p_0,u,T) = L(p,v,T), \qquad u \leqslant v \leqslant \bar{T}. \tag{15}$$

**证**：由定义，当 $u \leqslant v \leqslant \bar{T}$ 时

$$\begin{aligned} p(\bar{T}) &\leqslant L(p,v,T) \\ &= \sup(\tilde{p}(t): v \leqslant t \leqslant T, \tilde{p}(s) = p(s), 0 \leqslant s \leqslant v) \\ &\leqslant \sup(\tilde{p}(t): u \leqslant t \leqslant T, \tilde{p}(s) = p_0(s), 0 \leqslant s \leqslant u) \\ &= L(p_0,u,T) = p(\bar{T}). \end{aligned}$$
#

# §4　本章主要结果的证明及其应用

## 8. 特殊情形

本节继续上节的讨论. 在这里，我们将要建立在 §2 已经提到的主要结果.

仍然设 $p_0 \in \mathscr{P}^*(q)$，$u > 0$ 是固定的. 又设 $\lambda_0 \in \Lambda_t$，且 $p_0 \sim \lambda_0$.

首先考虑一个特殊情形.

**引理 A**

如果 $\lambda_0((0,u))=1$，则

(1) $$L(p_0,u,T)=L(p_0,u,2u),\qquad T\geqslant 2u.$$

**证**：由于 $p\in\mathscr{P}(p_0)$ 由 $p$ 对应的 $\lambda\in\Lambda_l$ 完全决定，故当 $\lambda_0((0,u))=1$ 时，仅有 $p_0$ 一个元，即

$$\mathscr{P}(p_0)=\{p_0\}.$$

因此

(2) $$L(p_0,u,T)=\max_{u\leqslant t\leqslant T}p_0(t).$$

从而(1)等价于

(3) $$\max_{u\leqslant t\leqslant T}p_0(t)=\max_{u\leqslant t\leqslant 2u}p_0(t),\qquad T\geqslant 2u.$$

现在假定 (3) 不成立，于是存在 $T>2u$ 使

(4) $$\xi=\max_{2u\leqslant t\leqslant T}p_0(t)>\max_{u\leqslant t\leqslant 2u}p_0(t)=\eta.$$

令 $h=\min(t>u:p_0(t)=\xi)$，则 $h$ 适合条件：

(5) $$2u<h\leqslant T,p_0(h)=\xi,p_0(t)<\xi,u\leqslant t<h.$$

因为 $\lambda_0((0,u))=1$，故 $\lambda_0([u,h])=0$，从而由 § 3 的引理 C，存在 $\tau$ 使得

(6) $$h-u\leqslant\tau<h \text{ 且 } p_0(\tau)\geqslant p_0(h).$$

此与 (5) 矛盾，于是(3) 成立. #

## 9. 一般情形

现在转向一般情形.

首先注意，如果 $p\in{}_u\mathscr{P}(p_0)$，$p\sim\lambda\in\Lambda_l$，则由 § 3(9) 式知.$\lambda=$

${}_u\lambda_0, {}_u p = {}_u p_0$. 于是由 § 1 (16) 式知，当 $T \leqslant 2u$ 有

$$(7)\quad p(T) = {}_u p_0(T) + \int_{[u,T)} f({}_u\lambda_0, T - x)\lambda(dx)$$

$$\leqslant {}_u p_0(T) + (1 - \lambda_0((0,u))) \max_{u \leqslant \tau \leqslant T} f({}_u\lambda_0, T - \tau).$$

**引理 B**

设 $p \in {}_u\mathscr{P}(p_0)$，$u < \overline{T} \leqslant T$ 且 $p(T) = L(p_0, u, T)$. 如果 $\overline{T} \leqslant 2u$，则

$$(8)\quad p(\overline{T}) = {}_u p_0(\overline{T}) + (1 - \lambda_0((0,u))) \max_{u \leqslant \tau \leqslant \overline{T}} f({}_u\lambda_0, T - \tau).$$

**证**：由 (7) 得

$$(9)\quad p(T) \leqslant {}_u p_0(\overline{T}) + (1 - \lambda_0((0,u))) \max_{0 \leqslant \tau \leqslant T - u} f({}_u\lambda_0, \overline{T} - \tau).$$

由于 $f({}_u\lambda_0, \eta)$ 是 $\eta$ 的连续函数（见 § 1 引理 A），我们可以选取 $\tau$ 使得

$$(10)\qquad u \leqslant \tau \leqslant \overline{T}, f({}_u\lambda_0, \overline{T} - \tau) = \max_{0 \leqslant \eta \leqslant \overline{T} - u} f({}_u\lambda_0, \eta).$$

现令

$$(11)\quad \tilde{\lambda}(A) = \lambda_0(A \cap (0,u)) + (1 - \lambda_0((0,u)))\delta_\tau(A),$$

$$A \in \mathscr{B}(0, \infty].$$

则 $\tilde{\lambda} \in \Lambda_l$. 取 $\tilde{p} \in {}_u\mathscr{P}(p_0)$ 使 $\tilde{p} \sim \tilde{\lambda}$. 将 (7) 式中的等式部分应用到 $\tilde{p}$ 得

$$(12)\qquad \tilde{p}(\overline{T}) = {}_u p_0(\overline{T}) + \int_{[u,\overline{T})} f({}_u\lambda_0, \overline{T} - x)\tilde{\lambda}(dx)$$

$$= {}_u p_0(\overline{T}) + (1 - \lambda_0((0,u)))f({}_u\lambda_0, \overline{T} - \tau).$$

从 (12)，(8) 和 (9) 得 $\tilde{p}(\overline{T}) \geqslant p(\overline{T}) = L(p_0, u, T)$. 然而由定义 $\tilde{p}(\overline{T}) \leqslant L(p_0, u, T)$，故 (8) 成立. #

现在考虑 $\overline{T} > 2u$ 的情形. 为此，需要引进一个新的概念. 令

(13)　$A(p_0,u)$

$$=\{T\in(u,\infty]: L(p_0,u,\tau)<L(p_0,u,T),\ u\leqslant\tau<T\}.$$

由定义直接看出，当 $T\in A(p_0,u)$ 时，则对任意 $p\in\mathscr{P}(p_0)$ 必有

(14)　$$p(t)<L(p_0,u,T),\qquad u\leqslant t<T.$$

因此，当 $T\in A(p_0,u)$，§3 引理 E 中的 $\overline{T}$ 必须取成 $T$．即存在 $p\in\mathscr{P}(p_0)$使得

(15)　$$p(T)=L(p_0,u,T)\ 且\ p(t)<p(T),\qquad u\leqslant t<T.$$

引理 C

设 $T\in A(p_0,u)$，$T>2u$．又设 $p\in\mathscr{P}(p_0)$ 使

(16)　$$p(T)=L(p_0,u,T).$$

则如果 $p\sim\lambda\in\Lambda_l$，必有

(17)　$$\lambda([T-u,T))>0.$$

证：用反证法．假定

(18)　$$\lambda([T-u,T))=0.$$

由于 $T\in A(p_0,u)$，由(14)，(16) 得

(19)　$$p(t)<p(T)=L(p_0,u,T),\qquad u\leqslant t<T.$$

从而 $D_-p(T)\geqslant0$．于是由第二章定理XII 就得 $D_+p(T)\geqslant0$．再由第二章定理 XI 就得

(20)　$$p(T)\leqslant\int_{(0,T]}p(T-s)\lambda(ds)=\int_{(0,T-u)}p(T-s)\lambda(ds).$$

此处用到假定 (18)．又由 §3 引理 G，$\lambda([T,\infty])=0$，从而，$\lambda([0,T-u))=1$ 于是由 (20) 知，存在 $h$ 使得 $u\leqslant h<T$ 且 $p(h)\geqslant p(T)$．此与 (19) 矛盾，从而 (18) 不成立．　#

引理 D

设 $T\in A(p_0,u)$ 且 $2u<T\leqslant 3u$. 则存在 $p\in {}_u\mathscr{P}(p_0)$ 适合下面的条件：

A. $p(T)=L(p_0,u,T)$, $u\leqslant t<T$;

B. 如果 $p\sim\lambda\in\Lambda_t$, 则存在 $\tau$ 使得

$$T-u\leqslant\tau<T,\quad \lambda(\tau)=1-\lambda_0((0,u));$$

C. $p(T)={}_u p_0(T)+(1-\lambda_0((0,u)))\max\limits_{T-u\leqslant\tau\leqslant T} f({}_u\lambda_0,T-\tau)$.

其中 $f({}_u\lambda_0,T-\tau)$ 的定义见 § 1 (15) 式.

证：从 § 3 引理 E,存在 $\bar{p}\in {}_u\mathscr{P}(p_0)$ 使

$$\bar{p}(T)=L(p_0,u,T). \tag{21}$$

设 $\lambda\in\Lambda_t$ 且 $\bar{p}\sim\lambda$ ,注意 ${}_u\lambda={}_u\lambda_0$,由 § 1 (19) 式得

$$\bar{p}(T)={}_u p_0(T)+\int_{[u,T)} f({}_u\lambda_0,T-x)\bar{\lambda}(dx) + \int_{[2u,T)} g({}_u\lambda_0,T-x)(\lambda-{}_u\lambda_0)^{(2)}(dx). \tag{22}$$

注意,在 $[u,\infty)$ 上,$\bar{\lambda}=\bar{\lambda}-{}_u\lambda_0$,因此上式成为

$$\bar{p}(T)={}_u p_0(T)+\int_{[u,T)} f({}_u\lambda_0,T-x)(\bar{\lambda}-{}_u\lambda_0)(dx) + \int_{[2u,T)} g({}_u\lambda_0,T-x)(\bar{\lambda}-{}_u\lambda_0)^{(2)}(dx). \tag{23}$$

由 § 3 引理 G ,$\bar{\lambda}((0,T))=1$ . 因此令

$$c=\lambda([u,T))=1-\lambda_0((0,u)). \tag{24}$$

由引理 C (17)式得,$c>0$ .

现在如果有

(25) $$\int_{[u,T)} f({}_u\lambda_0, T-x)(\bar{\lambda} - {}_u\lambda_0)(dx) + \int_{[2u,T)} g({}_u\lambda_0, T-x)(\bar{\lambda} - {}_u\lambda_0)^{(2)}(dx) \geqslant c \max_{T-u \leqslant x \leqslant T} f({}_u\lambda_0, T-x).$$

则由 §3 引理 A 及其证明知,存在 $[u,\infty]$ 上的测度 $\bar{\lambda}$ 满足

(26) $$\bar{\lambda}([T-u,\infty]) = 0, \qquad \bar{\lambda}([u, T-u)) = c.$$

且

(27) $$\int_{[u,T-u)} f({}_u\lambda_0, T-x)\bar{\lambda}(dx) + \int_{[2u,T)} g({}_u\lambda_0, T-x)\bar{\lambda}^{(2)}(dx) \geqslant \int_{[u,T)} f({}_u\lambda_0, T-x)(\lambda - {}_u\lambda_0)(dx) + \int_{[2u,T)} g({}_u\lambda_0, T-x)(\bar{\lambda} - {}_u\lambda_0)^{(2)}(dx).$$

注意 $\bar{\lambda}$ 仅仅是 $[u,\infty]$ 上的测度,现将它扩张到整个 $(0,\infty]$. 令

(28) $$\lambda^{\triangle}(A) = \lambda_0(A \cap (0,u)) + \bar{\lambda}(A \cap [u,\infty]), \qquad A \in \mathscr{B}(0,\infty].$$

则易见 $\lambda^{\triangle} \in \Lambda_l$. 现设 $p^{\triangle} \in {}_u\mathscr{P}(p_0)$ 且 $p^{\triangle} \sim \lambda^{\triangle}$, 于是由 (27) 得

(29) $$\int_{[u,T-u)} f({}_u\lambda_0, T-x)(\lambda^{\triangle} - {}_u\lambda_0)(dx) + \int_{[2u,T)} g({}_u\lambda_0, T-x)(\lambda^{\triangle} - {}_u\lambda_0)^{(2)}(dx) \geqslant \int_{[u,T-u)} f({}_u\lambda_0, T-x)(\lambda - {}_u\lambda_0)(dx) + \int_{[2u,T)} g({}_u\lambda_0, T-x)(\lambda - {}_u\lambda_0)^{(2)}(dx).$$

从 (23) 和 (29) 得 $p^{\triangle}(T) \geqslant \bar{p}(T)$(实际上, $p^{\triangle}(T) > p(T)$是不可能的,因 $p(T) = L(p_0, u, T)$).

由于 $T \in A(p_0, u)$, 因此 $p^{\triangle}(t) < p^{\triangle}(T)$ $(u \leqslant t < T)$, 故

$D_+ p(T) \geqslant D_- p(T) \geqslant 0$. 又由 (26),(28) 知 $\lambda^\wedge([T-u,T])=0$ . 应用右导数方程(第三章定理 XI), 我们得

$$p^\triangle(T) \leqslant \int_{(0,T-u)} p^\triangle(T-s)\lambda^\wedge(ds) .$$

因此必须存在 $T^*$ 满足

$$u < T^* < T, p^\wedge(T^*) \geqslant p^\wedge(T) \geqslant \bar{p}(T)$$

此与 $T \in A(p_0,u)$ 矛盾. 所以 (25) 不成立.

于是我们必须有

(30)
$$\int_{[u,T)} f({}_u\lambda_0, T-x)(\lambda - {}_u\lambda_0)(dx) + \int_{[2u,T)} g({}_u\lambda_0, T-x)(\bar{\lambda} - {}_u\lambda_0)^{(2)}(dx) \leqslant c \max_{T-u \leqslant x \leqslant T} f({}_u\lambda_0, T-x).$$

现在选取 $\tau$ 使得

(31) $T-u \leqslant \tau \leqslant T$ 且 $f({}_u\lambda_0, T-\tau) = \max\limits_{T-u \leqslant x \leqslant T} f({}_u\lambda_0, T-x)$.

并令

$$\lambda(A) = \lambda_0(A \cap (0,u)) + (1-\lambda_0((0,u)))\delta_\tau(A), \quad A \in \mathscr{B}(0,\infty].$$

则 $\lambda \in \Lambda_l$. 设 $p \in {}_u\mathscr{P}(p_0)$ 使 $p \sim \lambda$. 则

$$L(p_0,u,T) \geqslant p(T) = {}_u p_0(T) + c\, f({}_u\lambda_0, T-\tau) \geqslant p(T) = L(p_0,u,T).$$

于是对这个 $p$ ,引理中的 A 至 C 都成立.　　#

下面的引理是本节主要结果所要用到的最后一个引理.

**引理** E

(32)　　$3u \in A(p_0,u)$.

**证**：仍用反证法，假定

$$3u \in A(p_0, u). \tag{33}$$

由引理 D，存在 $p \in {}_u\mathscr{P}(p_0)$ 满足条件

1)　$p(3u) = L(p_0, u, 3u) > p(t)$，　$u \leqslant t < 3u$.

2)　如果 $\lambda \in \Lambda_t$，$p \sim \lambda$，则存在 $\tau$ 使

$$2u \leqslant \tau < 3u, \quad \lambda(\tau) = 1 - \lambda_0((0, u)).$$

将 §3 引理 C 应用到 ${}_up$，则存在 $h$ 使

$$2u \leqslant h < 3u, \quad {}_up(h) \geqslant {}_up(3u). \tag{34}$$

现令 $\bar{\tau} = h - (3u - \tau)$. 因为 $h \geqslant 2u$ 且 $2u \leqslant \tau < 3u$，故 $3u - \tau \leqslant u$，从而 $\bar{\tau} \geqslant u$.　令

$$\bar{\lambda}(A) = \lambda_0(A \cap (0, u)) + (1 - \lambda_0((0, u)))\delta_{\bar{\tau}}(A), \tag{35}$$
$$A \in \mathscr{B}(0, \infty].$$

并设 $\bar{p} \in {}_u\mathscr{P}(p_0)$ 使 $\bar{p} \sim \bar{\lambda}$. 注意 $h - \bar{\tau} = 3u - \tau$，则

$$\begin{aligned}\bar{p}(h) &= {}_u\bar{p}(h) + (1 - \lambda_0((0, u)))f({}_u\lambda_0, h - \bar{\tau}) \\ &= {}_up_0(h) + (1 - \lambda_0((0, u)))f({}_u\lambda_0, h - \bar{\tau}) \\ &\geqslant {}_up_0(3u) + (1 - \lambda_0((0, u)))f({}_u\lambda_0, 3u - \tau) = p(3u).\end{aligned}$$

然而 $h < 3u$，此与 $3u \in A(p_0, u)$ 矛盾.　#

## 10. 主要定理

现在我们可以用定理的形式来表述 §2 所提到的主要结果了.

**定理 Ⅲ**

对任意 $p_0 \in \mathscr{P}^*$，$u > 0$ 我们有

$$L(p_0, u, T) = L(p_0, u, 3u), \qquad T \geqslant 3u. \tag{36}$$

还有

$$A(p_0,u)\subset(u,3u). \tag{37}$$

证：由(36)和引理E直接得(37)，因此只须证(36). 仍用反证法. 假定(36)不成立，于是存在$p_0\in\mathscr{P}^*$，$u>0$及$T>3u$，使得$T\in A(p_0,u)$，即

$$L(p_0,u,T)>L(p_0,u,\tau),\qquad u\leqslant\tau<T. \tag{38}$$

从而存在$p\in\mathscr{P}(p_0)$使得

$$p(T)=L(p_0,u,T)>p(t),\qquad u\leqslant t<T. \tag{39}$$

于是由§3引理H知

$$L(p_0,u,T)=L(p,T/3,T). \tag{40}$$

由引理E，

$$T\notin A(p,T/3). \tag{41}$$

于是从定义存在$\tau_0$满足

$$T/3\leqslant\tau_0<T\text{ 且 }L(p,T/3,T)=L(p,T/3,\tau_0). \tag{42}$$

然而显然有

$$L(p,T/3,\tau_0)\leqslant L(p_0,u,\tau_0). \tag{43}$$

从(43)、(42)和(40)得

$$\begin{aligned}L(p_0,u,\tau_0)&\geqslant L(p,T/3,\tau_0)\\&=L(p,T/3,T)=L(p_0,u,T).\end{aligned}$$

但是$\tau_0<T$，此与(38)矛盾. #

**定理Ⅳ**

设$p_0\in\mathscr{P}^*(q)$，$u>0$，$\lambda_0\in\Lambda_l$且$p_0\sim\lambda_0$，则或者存在$T^*$使$u\leqslant T^*\leqslant 2u$且满足

(44) $$L(p_0,u,T) < L(p_0,u,T^*), \qquad T < T^*.$$

(45) $$L(p_0,u,T) - L(p_0,u,T^*) = {}_u p_0(T^*) + (1-\lambda_0((0,u))) \max_{u \leqslant s \leqslant T^*} f({}_u\lambda_0, T^* - s), \qquad T \geqslant T^*.$$

或者存在 $T^*$ 使 $2u < T^* < 3u$，且

(46) $$L(p_0,u,T) < L(p_0,u,T^*), \qquad T < T^*.$$

(47) $$L(p_0,u,T) - L(p_0,u,T^*) = {}_u p_0(T^*) + (1-\lambda_0((0,u))) \max_{T^*-u \leqslant s \leqslant T^*} f({}_u\lambda_0, T^* - s), \qquad T \geqslant T^*.$$

其中 $f(\lambda,\eta)$ 由 §1 (15) 式定义.

证：由定理 Ⅰ、引理 B 和引理 D 直接得到.　#

## 11. 主要定理的一个应用

现在我们考虑另一个特殊情形. 设 $p_0 \in \mathscr{P}^*(q)$，$\lambda_0 \in \Lambda_l$，$p_0 \sim \lambda_0$，又设 $u>0$，如果 $\lambda_0((0,u))=0$，则必有

(48) $$p(s) = e^{-qs}, \qquad 0 \leqslant s \leqslant u.$$

在这一情形，我们将给出 $L(p_0,u,T)$ $(T>u)$ 的明确表达式，首先证明一个引理.

### 引理 F

设 $q>0, u>0$. 令

(49) $$b(t) = e^{-qt} + q(t-u)e^{-q(t-u)}, \qquad t \geqslant u.$$

则 $b(\cdot)$ 在 $t_0 = u + (1-e^{-qu})/q$ 处达到最大值，

(50) $$b(t_0) = \exp(-(1-e^{-qu})).$$

其次，$b(\cdot)$ 在 $[u,t_0]$ 是增函数，而在 $[t_0,\infty]$ 是减函数.

证：对 $b(\cdot)$ 求导数得

(51)
$$b'(t) = -qe^{-qt}(1 - e^{qu} + q(t-u)e^{qu}).$$

令

(52)
$$1 - e^{qu} + q(t_0 - u)e^{qu} = 0.$$

解出得

(53)
$$t_0 == u + (1 - e^{-qu})/q .$$

显然，当 $u \leqslant t < t_0$ 时，$b'(t) > 0$，而当 $t_0 < t$ 时，$b'(t) \leqslant 0$，因此$b(\cdot)$ 在 $[u,t_0]$ 是递增的，而在 $[t_0,\infty]$ 是递减的. 现将 $t_0$ 代入(49)得

$$b(t_0) = \exp(-(1 - e^{-qu})).$$

#

引理 G

设 $q>0, u>0$，$u \leqslant T \leqslant t_0 - u + (1-e^{-qu})/q$. 令

(54)
$$f(\tau) = e^{-qT} + q(T-\tau)e^{-q(T-\tau)}.$$

则 $f(\cdot)$ 在 $[u,T]$ 内是单调下降的，从而有

(55)
$$f(\tau) \leqslant f(u) = e^{-qT} + q(T-u)e^{-q(T-u)}, \quad u \leqslant \tau \leqslant T.$$

证：我们有

(56)
$$f'(\tau) = qe^{-q(T-\tau)}(q(T-\tau) - 1), \qquad u \leqslant \tau \leqslant T.$$

因为 $u \leqslant \tau \leqslant T$，$u \leqslant T \leqslant t_0$，故 $T - \tau \leqslant t_0 - u$ . 所以

$$\begin{aligned} f'(\tau) &\leqslant qe^{-q(T-\tau)}(q(t_0 - u) - 1), \\ &= qe^{-q(T-\tau)}(1 - e^{-qu} - 1) \\ &= -qe^{-q(T-\tau)}e^{-qu} < 0. \end{aligned}$$

#

**定理 V**

设 $p_0\in\mathscr{P}^*(q)$，$\lambda_0\in\Lambda_l$，$p_0\sim\lambda_0$，$u>0$，如果 $\lambda_0((0,u))=0$，则

(57) $$L(p_0,u,T)=\begin{cases}e^{-qT}+q(T-u)e^{-q(T-u)}, & T\leqslant t_0,\\ \exp(-(1-e^{-qu})), & T\geqslant t_0.\end{cases}$$

其中 $t_0=u+(1-e^{-qu})/q$.

**证**：由于 $\lambda_0((0,u))=0$，因此 $_u\lambda_0((0,t))=0$ $(0\leqslant t<\infty)$，即 $_u\lambda_0(\{\infty\})=1$. 从而有

(58) $$_up_0(t)=e^{-qt},\qquad 0\leqslant t\leqslant\infty.$$

又从定义(见§1 (15) 式) 立得

(59) $$f(_u\lambda_0,\eta)=q\eta e^{-q\eta},\qquad \eta\geqslant 0.$$

现设 $T\in A(p_0,u)$，由定理 Ⅲ，$u<T<3u$. 下面我们证明 $T\leqslant t_0$，即若 $T>t_0$，则 $T\notin A(p_0,u)$. 事实上，如果 $2u\leqslant T<3u$，则由引理 D，存在 $p\in{_u\mathscr{P}}(p_0)$ 及 $T-u\leqslant\tau<T$，使

(60) $$L(p_0,u,T)=p(T)=e^{-qT}+q(T-\tau)e^{-q(T-\tau)}.$$

如果 $u<T\leqslant 2u$，则由引理 B，存在 $p\in{_u\mathscr{P}}(p_0)$ 及 $\tau$，$u\leqslant\tau<T$，使(60)成立. 由引理 F 及 (60) 得

(61) $$\begin{aligned}L(p_0,u,T)&=e^{-qT}+q(T-\tau)e^{-q(T-\tau)}\\&\leqslant\exp(-(1-e^{-q\tau}))\leqslant\exp(-(1-e^{-qu})).\end{aligned}$$

另一方面，我们可以取 $\bar\lambda\in\Lambda_l$，使 $\bar\lambda(\{u\})=1$. 此时如果 $\bar p\sim\bar\lambda$，则由引理 F

(62) $$\begin{aligned}\bar p(t_0)&=e^{-qt_0}+q(t_0-u)e^{-q(t_0-u)}\\&=\exp(-(1-e^{-qu})).\end{aligned}$$

由(61)、(62) 以及 $A(p_0,u)$ 的定义知，当 $T>t_0$，$T\neq A(p_0,u)$，而且

证明了 (57) 中的 $T\geqslant t_0$ 部分.

现设 $u<T\leqslant t_0$. 此时对任意 $\bar{p}\in {}_u\mathscr{P}(p_0)$ 必有

(63)　　$$\bar{p}(T)\leqslant \bar{p}(T)=e^{-qT}+q(T-u)e^{-q(t-u)}.$$

事实上,若 $\bar{p}\sim\bar{\lambda}\in \Lambda_t$,则因 $\bar{p}\in {}_u\mathscr{P}(p_0)$ 及 $u<T\leqslant t_0<2u$,得

(64)　　$$\bar{p}(T)=e^{-qT}+\int_{[u,t)}q(T-s)e^{-q(T-s)}\bar{\lambda}(ds).$$

再由引理 G ,就得 (63). (63)说明,当 $u<T\leqslant t_0$ 时, $T\in A(p_0,u)$而且 (57) 中 $T\leqslant t_0$ 的部分成立.　　#

**推论**(D. Griffeath **定理**)

设 $p\in\mathscr{P}(q,u)$ (其定义见 §2 (10)),则

(65)　　$$p(t)\leqslant \exp\left(-(1-e^{-qu}\right),\qquad t\geqslant u.$$

**证**: 是定理 V 的直接推论.　　#

## §5　非稳定标准 $p$- 函数的情形

### 12. 主要结果

设 $p_0\in\mathscr{P}$ , $u>0$. 令

(1)　　$${}_u\mathscr{P}(p_0)=\{p\in\mathscr{P}:p(s)=p_0(s),0\leqslant s\leqslant u\}.$$

又令

(2)　　$$L(p_0,u,T) = \sup\left(p(t):u\leqslant t\leqslant T,p\in {}_u\mathscr{P}(p_0)\right),u\leqslant T\leqslant\infty.$$

则我们仍有

(3)　　$$L(p_0,u,T)=L(p_0,u,3u),\qquad 3u\leqslant T\leqslant\infty.$$

现在我们简要地给出(3)的证明.

假定 $p_0 \sim u_0 \in \Lambda$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 令

(4) $$u_{0\varepsilon}(A) = u_0(A \cap (\varepsilon, \infty]), \qquad A \in \mathscr{B}(0, \infty].$$

又设 $p_{0\varepsilon} \in \mathscr{P}^*$ 使 $p_{0\varepsilon} \sim u_{0\varepsilon}$. 则定理 II 知

(5) $$L(p_{0\varepsilon}, u, T) = L(p_{0\varepsilon}, u, 3u), \qquad T > 3u.$$

下面我们证明,对一切固定的 $T \geqslant u$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} L(p_{0\varepsilon}, u, T)$ 存在且

(6) $$\lim_{\varepsilon \to 0} L(p_{0\varepsilon}, u, T) = L(p_0, u, T).$$

事实上,和稳定的情形一样,存在 $\bar{p} \in {}_u\mathscr{P}(p_0)$, $u \leqslant \bar{T} \leqslant T$. 使 $\bar{p}(\bar{T}) = L(p_0, u, T)$. 因此 $\bar{p}_\varepsilon \xrightarrow{C} \bar{p}$. 从而 $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \bar{p}_\varepsilon(\bar{T}) = \bar{p}(\bar{T})$. 由此推出

(7) $$\liminf_{\varepsilon \to 0} L(p_{0\varepsilon}, u, T) \geqslant L(p_0, u, T).$$

反之,我们有

(8) $$\limsup_{\varepsilon \to 0} L(p_{0\varepsilon}, u, T) \leqslant L(p_0, u, T).$$

事实上,如果(8)式不成立,则存在 $\varepsilon_n \to 0$, 及 $\delta > 0$, 使

$$L(p_{0\varepsilon_n}, u, T) \geqslant L(p_0, u, T) + \delta, \qquad n \in N.$$

从而存在 $\bar{p}_n \in {}_u\mathscr{P}(p_{0\varepsilon_n})$, $u \leqslant \bar{T}_n \leqslant T$, 使

(9) $$\bar{p}_n(\bar{T}_n) = L(p_{0\varepsilon_n}, u, T) \geqslant L(p_0, u, T) + \delta, \qquad n \in N.$$

将§3 引理 D 的证明稍加修改,可以证明:存在$\{\bar{p}_n, n \in N\}$的子列(不妨就设是 $\bar{p}_n$, $n \in N$ 本身), 及 $p^* \in {}_u\mathscr{P}(p_0)$ 使 $\bar{p}_n \xrightarrow{C} p^*$, 因此任取$\{\bar{T}_n\}$的极限点 $T^*$, 得 $\lim\limits_{n \to \infty} \bar{p}_n(T^*) = p^*(T^*) \geqslant L(p_0, u, T) + \delta$. 由于 $p^* \in {}_u\mathscr{P}(p_0)$ 及 $u \leqslant T^* \leqslant T$, 必须 $p^*(T^*) \leqslant L(p_0, u, T)$. 由此矛盾就推知(8)成立.

现由(7)、(8)得(6). 再由(5)、(6)就得(3).

# §6　问题

问题

从本章定理 Ⅲ 的证明过程,很容易使人想到如下的猜测:对任意 $p_0 \in \mathscr{P}^*, u>0$ 有

$$L(p_0,u,T) = L(p_0,u,2u), \qquad T > 2u. \tag{1}$$

如果 (1) 获证,则本章的一些结果(例如定理 Ⅳ、Ⅴ)和第七章的叙述将会简明许多.

**注释**

本章全部内容来自 Dai Yonglong (1991a), 定理 Ⅴ 的推论(即Griffeath 定理) 见 Griffeath (1976),但是那里的证明方法是完全不同的.

# 第六章　标准 $p$-函数和它的退化 $p$-函数的最大差

## §1　本章的主要结果与证明思路

### 1. 本章的主要问题与主要结果

固定 $p_0 \in \mathscr{P}^*(q)$ 和 $u>0$ 并设 $\lambda_0 \in \Lambda_l$ 且 $p_0 \sim \lambda_0$. 在第五章，我们已建立了下面的表达式. 对任意 $p \in {}_u\mathscr{P}(p_0)$，如果 $p \sim \lambda \in \Lambda_l$，则

$$p(t) - {}_u p(t) = \int_{[u,t)} f({}_u\lambda_0, t-x)\lambda(dx), \quad u \leqslant t \leqslant 2u. \tag{1}$$

其中 $f(\cdot,\cdot)$ 的定义是：对任意 $\lambda \sim \in \Lambda_l$，

$$f(\lambda,\eta) = q\eta e^{-q\eta} + \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^{\eta} \frac{q^n(\eta-y)^n}{(n-1)!} e^{-q(\eta-y)} \lambda^{(n-1)}(dy), \quad \eta \geqslant 0. \tag{2}$$

为了研究马尔科夫振荡问题，有必要将上述结果进一步具体化.

现在我们叙述本章所要研究的问题和获得的主要结果.

我们提出的问题是：当 $p$ 遍历 ${}_u\mathscr{P}(p_0)$ 时，求 $p(t) - {}_u p(t)$ $(u \leqslant t \leqslant 2u)$ 的上确界. 换言之，令

$$\mathscr{K}(p_0,u) = \sup\,(p(t) - {}_u p(t) : p \in {}_u\mathscr{P}(p_0), \quad u \leqslant t \leqslant 2u). \tag{3}$$

我们的目的是求 $\mathscr{K}(p_0,u)$，然而 $\mathscr{K}(p_0,u)$ 是 $p_0 \in \mathscr{P}^*$，$u \in R$

的函数.这个函数一般是求不出来的.本章的目的只是证明

(4)　　$\mathscr{K}(p_0,u)\leqslant 1/e,\qquad p_0\in\mathscr{P}^*, u\in R.$

下面的例子指出,这个结论已经不能再改进了.

取 $p_0\in\mathscr{P}(u)$（其定义见第五章§2（11）式）. 于是存在$0<q<\infty$，$p_0$在$[0,u]$以指数下降:$p_0(t)=e^{-qt}(0\leqslant t\leqslant u)$. 因此如 $p_0\sim\lambda_0\in\Lambda_l$，则 $\lambda_0((0,u))=0$.

现令 $\lambda\in\Lambda_l$ 满足 $\lambda(\{u\})=1$，并取 $p\in{}_u\mathscr{P}(p_0)$，使 $p\sim\lambda$. 则显然

(5)　　$p(t)=e^{-qt}+q(t-u)e^{-q(t-u)},\qquad u\leqslant t\leqslant 2u.$

如果 $u>\dfrac{1}{q}$，在（5）中令 $t_0=u+\dfrac{1}{q}<2u$，则

$$p(t_0)=e^{-qt_0}+\frac{1}{e}=p_0(t_0)+\frac{1}{e}={}_up(t_0)+\frac{1}{e}.$$

这一例子指出，(4)式如果被证明,则已经是最好的结果了，而且可将（4）写成:

$$\max_{p_0\in\mathscr{P}^*,u\in R}\mathscr{K}(p_0,u)=1/e.$$

2. 证明思路

上述结果的证明不是一件容易的事.为此需要分成若干步骤.首先考虑一些简单情形.其主要思路是将典型测度分布离散化,然后应用弱收敛定理到一般情形.

由第三章定理 XII 已知,若 $p\in\mathscr{P}^*(q)$，$p\sim\lambda\in\Lambda_l$,则有

(6)　　$$p(t)=e^{-qt}+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\frac{q^k(t-s)^k}{k!}e^{-q(t-s)}\lambda^{(k)}(ds),$$

$$0\leqslant t\leqslant\infty.$$

其中 $\lambda^{(k)}$是 $\lambda$ 的 $k$ 次卷积.

从 (6) 式看出，最简单的情形是 $\lambda$ 的分布质量集中到点 $\infty$ 的情形，此时

(7) $$p(t)=e^{-qt},\qquad 0\leqslant t\leqslant\infty.$$

特别，如果 $q=0$，则 $p(t)\equiv 1(0\leqslant t\leqslant\infty)$. 对于形如 (7) 的 $p$-函数，没有研究的价值. 特别是，本书的主要目的是研究 $p$-函数的振荡问题，而形如 (7) 的 $p$-函数是单调下降的，没有振荡现象.

因此，我们有兴趣的最简单的情形是 $\lambda$ 的分布质量集中到一个有限点，不妨取这个有限点是 1，因此令

(8) $$\lambda(1)=1.$$

对于这个特殊情形，我们给它一个专有的记号，即以 $p_q(\cdot)$ 记(8) 所定义的 $\lambda$ 所对应的 $p$-函数，于是由 (6) 得

(9) $$p_q(t)=e^{-qt}+\sum_{k=1}^{[t]}\frac{q^k(t-k)^k}{k!}e^{-q(t-k)},$$
$$0\leqslant t<\infty.$$

按照第五章定理V 的推论有

(10) $$p_q(t)\leqslant\exp(-(1-e^{-q})),\qquad t\geqslant 1.$$

为了建立结果(4)，我们准备分成下面几步.

A. 固定自然数 $n\geqslant 2$. 又设 $0\leqslant a\leqslant 1$，令

(11) $$\lambda(1)=a,\quad \lambda(n)=1-a.$$

如果以 $_*\lambda$ 记 $\lambda$ 的退化，则按定义(第五章 §1 (1) 式)

(12) $$_*\lambda(1)=a,\quad _*\lambda(\infty)=1-a.$$

现取 $p\in\mathscr{P}^*(q)$，使 $p\sim\lambda$，则由(6) 式有

(13) $$p(t)=\sum_{k=0}^{[t]}\frac{q^k(t-k)^k}{k!}e^{-q(t-k)}a^k,\qquad 0\leqslant t\leqslant n.$$

$$(14)\qquad p(t)=\sum_{k=0}^{[t]}\frac{q^k(t-k)^k}{k!}e^{-q(t-k)}a^k$$

$$+\sum_{k=1}^{[t-n+1]}\frac{q^k(t-n-k+1)^k}{(k-1)!}e^{-q(t-n-k+1)}(1-a)a^{k-1},$$

$$n\leqslant t\leqslant 2n.$$

关于 $t>2n$，$p(t)$ 的表达式此处不再写出(后面不需要). ${}_np(\cdot)$ 的表达式则是

$$(15)\qquad {}_np(t)=\sum_{k=0}^{[t]}\frac{q^k(t-k)^k}{k!}e^{-q(t-k)}a^k,\qquad 0\leqslant t<\infty.$$

我们将在 §2 分别对 $q\geqslant 1$ 和 $q\leqslant 1$ 的情形证明

$$(16)\qquad p(t)-{}_np(t)\leqslant 1/e,\qquad n\leqslant t\leqslant 2n.$$

B. 仍然固定 $n\geqslant 2$，设 $0<a\leqslant 1$. 又设非负实数 $c_1,\cdots,c_{n-1}$ 满足 $\sum_{j=1}^{n-1}c_j=1$. 并令

$$(17)\quad \lambda(j)=a_j=c_ja,\ 1\leqslant j\leqslant n-1,\ \lambda(n)=1-a=a_n.$$

于是

$$(18)\quad {}_n\lambda(j)=a_j=c_ja,\ 1\leqslant j\leqslant n-1,\ {}_n\lambda(\infty)=1-a.$$

现取 $p\in\mathscr{P}^*(q)$，使 $p\sim\lambda$. 则由(6)式有

$$(19)\quad p(t)=e^{-qt}+\sum_{k=1}^{[t]}\sum_{j=1}^{[t]}\sum_{j_1+\cdots+j_k=j}\frac{q^k(t-j)^k}{k!}e^{-q(t-j)}a_{j_1}\cdots a_{j_k},$$

$$t\in\overline{R}.$$

而 ${}_np(\cdot)$ 的表达式则为

$$(20)\quad {}_np(t)=e^{-qt}$$

$$+\sum_{k=1}^{[t]}\sum_{j=1}^{[t]}\sum_{\substack{j_1+\cdots+j_k=j\\ 1\leqslant j_1,\cdots,j_k<n}}\frac{q^k(t-j)^k}{k!}e^{-q(t-j)}a_{j_1}\cdots a_{j_k},\ t\in\overline{R}.$$

我们将在 §3 分别 $q\geqslant 1$ 和 $q\leqslant 1$ 的情形证明

(21)　　$p(t) - {}_np(t) \leqslant 1/e, \qquad n \leqslant t \leqslant 2n.$

C. 最后我们将在 §4 对一般的 $p_0 \in \mathscr{P}^*$, $u \in R$ 证明 (4).

## §2　主要结果的证明(一)

### 3. 几个一般性引理

下面引理 A 至 F 是很初等的,其目的是为了使后面主要定理的证明叙述不至太长.

**引理 A**

设 $f_0, f_1 \geqslant 0$ 且

(1)　$g(a) = (1-a)f_0 + (1-a)af_1, \qquad 0 \leqslant a \leqslant 1.$

则当 $f_0 \geqslant f_1$ 时,$g(a) \leqslant f_0 (0 \leqslant a \leqslant 1)$. 如果 $f_1 > f_0$,则

(2)
$$g(a) \leqslant \frac{f_0}{2} + \frac{f_1}{4} + \frac{f_0^2}{4f_1} \leqslant \frac{3}{4}f_0 + \frac{1}{4}f_1, \qquad 0 \leqslant a \leqslant 1.$$

**证**: 当 $f_0 \geqslant f$,由(1) 自然有 $g(a) \leqslant f_0 (0 \leqslant a \leqslant 1)$. 如果 $f_1 > f_0 \geqslant 0$, 则 $f_1 > 0$. 取导数 $g'(a) = -f_0 + f_1 - 2af_1$, 易见 $g(a)$ 在点 $a_0 = \left(1 - \frac{f_0}{f_1}\right)/2$ 处达到最大值. #

**引理 B**

$h(q) = q + \frac{1}{2}e^{-q} + e^{-q/2}$ 是 $q$ 在 $[0, \infty)$ 上的严格增函数.

证:由于 $h'(q) = 1 - \frac{1}{2}e^{-q} - \frac{1}{2}e^{-q/2} > 0\ (q > 0)$. #

引理 C

设 $q>0$,则

(3) $$\frac{2}{q} - \frac{3}{q}e^{-q} < 1.$$

证:(3)等价于

(4) $$3e^{-q} + q > 2.$$

设 $g(q)=3e^{-q}+q$,则 $g'(q)=-3e^{-q}+1$. 因此 $g(\cdot)$ 在点 $q_0$ 取最小值,$q_0$ 满足方程 $e^{-q_0}=1/3$. 因为 $q_0>1$,故 $g(q)\geqslant 1+q_0>2$. #

引理 D

设 $n\in N$,$f(x)=x^ne^{-x}(x\geqslant 0)$,则 $f(\cdot)$ 在区间$[0,n]$是严格增的,在 $[n,\infty)$ 是严格减的,而且 $\max\limits_{0\leqslant x<\infty} f(x)=n^ne^{-n}$.

证:由于 $f'(x)=(n-x)x^{n-1}e^{-x}$. #

引理 E

设 $q\geqslant 1$ 和

(5) $H(t) = \frac{3}{4}q(t-1)e^{-q(t-1)} + \frac{1}{4}q^2(t-2)^2e^{-q(t-2)}$, $t \geqslant 2$.

则 $H(t)\leqslant 1/e\ (t\geqslant 2)$ 且在 $[3,\infty)$ 上 $H(\cdot)$是严格减的.

证:如果 $q(t-1)e^{-q(t-1)}\geqslant q^2(t-2)^2e^{-q(t-2)}$,则从引理 D 有

(6) $$H(t)\leqslant q(t-1)e^{-q(t-1)}\leqslant 1/e\ .$$

现设 $t_1$是下述方程的解：

(7) $$q(t-1)e^{-q(t-1)}=q^2(t-2)^2e^{-q(t-2)},\qquad t\geqslant 2.$$

上述方程整理后变成（约去非零因子）：

(8) $$q(t-2)^2e^q-(t-2)-1=0,\qquad t\geqslant 2.$$

于是（注意 $q\geqslant 1$）

(9) $$t_1=2+\frac{1+\sqrt{1+4qe^q}}{2qe^q}\geqslant 2+\frac{1}{2q}e^{-q}+\frac{1}{q}e^{-q/2}.$$

令

(10) $$t_2=2+\frac{1}{2q}e^{-q}+\frac{1}{q}e^{-q/2}.$$

因此从（6）及（9）得

(11) $$H(t)\leqslant 1/e,\qquad 2\leqslant t\leqslant t_2.$$

现设 $t\geqslant t_2$，从引理 D

(12) $$q^2(t-2)^2e^{-q(t-2)}\leqslant 2^2e^{-2},\qquad t\geqslant 2.$$

由于 $t_2>2$，且 $q(t-1)e^{-q(t-1)}$当 $q\geqslant 1$ 时，在 $t\geqslant 2$ 是单调下降的，故由(12) 得

(13) $$H(t)\leqslant \frac{3}{4}q(t_2-1)e^{-(t_2-1)}+e^{-2},\qquad t\geqslant t_2.$$

现将（10）代入(13) 得

(14) $$H(t)\leqslant \frac{3}{4}\left(q+\frac{1}{2}e^{-q}+e^{-q/2}\right)\times\exp\left(-\left(q+\frac{1}{2}e^{-q}+e^{-q/2}\right)\right)+e^{-2},\qquad t\geqslant t_2.$$

由引理 B，$q+\frac{1}{2}e^{-q}+e^{-q/2}$ 是 $q$ 的严格增函数，并注意 $q\geqslant 1$ 和 $xe^{-x}$在 $[0,\infty]$ 是 $x$ 的递减函数，得

$$(15)\quad H(t) \leqslant \frac{3}{4}\left(1 + \frac{1}{2}e^{-1} + e^{-1/2}\right)$$
$$\times \exp\left(-1 - \frac{1}{2}e^{-1} - e^{-1/2}\right) + e^{-2}$$
$$\approx \frac{3}{4} \times 1.8e^{-1.8} + e^{-2}$$
$$\approx \frac{3}{4} \times 1.8 \times 0.1653 + 0.1353$$
$$\approx 0.3584 < 0.3679 \approx 1/e, \qquad t \geqslant t_2.$$

由 (11)、(15) 得

$$(16)\qquad H(t) \leqslant 1/e, \qquad t \geqslant 2.$$

现证 $H(\cdot)$在$[3,\infty)$ 是严格减的. 对 $H(t)$ 求导数,并整理成 $t-2$ 的二次方程,得

$$H'(t) = -\frac{q}{4}e^{-q(t-1)}\left(-3 + 3q - (2qe^q - 3q)(t-2) + q^2(t-2)^2e^q\right).$$

令 $H'(t_3)=0$, 并应用引理 C 得

$$t_3 - 2 = \frac{2qe^q - 3q \pm q\sqrt{(2e^q-3)^2 - 12e^q(q-1)}}{2q^2e^q}$$
$$\leqslant \frac{2(2e^q-3)}{2qe^q} = \frac{2}{q} - \frac{3}{q}e^{-q} < 1.$$

因此 $H'(t)$ 在$[2,3)$ 之内才可能有解,故 $H'(t)$ 在 $[3,\infty]$ 内无零点,从而 $H(\cdot)$ 在 $[3,\infty]$ 是减函数. #

**引理 F**

设 $q \geqslant 1$ ,则方程

$$(17)\quad q(t-1)e^{-q(t-1)} = q^2(t-2)^2e^{-q(t-2)}, \qquad t \geqslant 2.$$

在[2,3] 之内有唯一解,且

(18) $$q(t-1)e^{-q(t-1)} < q^2(t-2)^2e^{-q(t-2)}, \qquad t \geqslant 3.$$

**证**：由引理 E 的证明，方程(17) 在约去非零因子之后可以整理成(8) 式. 方程 (8) 只有一个解 $t_1>2$，即

$$t_1 = 2 + \frac{1+\sqrt{1+4qe^q}}{2qe^q}.$$

但是 $1+4qe^q<(2qe^q-1)^2(q\geqslant 1)$，故 $t_1<3$. 故当 $2\leqslant t\leqslant t_1$ 时，$q(t-1)e^{-q(t-1)}\geqslant q^2(t-2)^2e^{-q(t-2)}$，而当 $t>t_1$ 时 (18) 成立. #

4. 基本引理

现在固定 $q$，$0<q<\infty$，和 $0\leqslant a\leqslant 1$ 令

(19) $$G_q(t) = \sum_{k=1}^{[t]} \frac{q^k(t-k)^ke^{-q(t-k)}}{(k-1)!}(1-a)a^{k-1}, \qquad t \geqslant 1.$$

**引理 G**

当 $q\geqslant 1$，则

(20) $$G_q(t) \leqslant 1/e, \qquad t \geqslant 1.$$

**证**：我们将证明分成若干步.

1) 当 $1\leqslant t\leqslant 2$ 时，我们有

$$G_q(t) = (1-a)q(t-1)e^{-q(t-1)} \leqslant (1-a)e^{-1} \leqslant e^{-1}.$$

2) 当 $2\leqslant t\leqslant 3$ 时，我们有

(21) $$G_q(t) = (1-a)q(t-1)e^{-q(t-1)} + (1-a)aq^2(t-2)^2e^{-q(t-2)}.$$

如果 $q(t-1)e^{-q(t-1)}\geqslant q^2(t-2)^2e^{-q(t-2)}$，则由引理 A

$$G_q(t) \leqslant q(t-1)e^{-q(t-1)} \leqslant 1/e.$$

如果 $q(t-1)e^{-q(t-1)}<q^2(t-2)^2e^{-q(t-2)}$，则由引理 A 与引理 E 得

$$G_q(t)\leqslant\frac{3}{4}q(t-1)e^{-q(t-1)}+\frac{1}{4}q^2(t-2)^2e^{-q(t-2)}\leqslant 1/e.$$

3) 当 $t\geqslant 3$ 时，有

$$G_q(t)=(1-a)q(t-1)e^{-q(t-1)}+(1-a)aq^2(t-2)^2e^{-q(t-2)}+\sum_{k=3}^{[t]}\frac{(1-a)a^{k-1}}{(k-1)!}q^k(t-k)^ke^{-q(t-k)}. \tag{22}$$

由引理 F 得

$$q(t-1)e^{-q(t-1)}<q^2(t-2)^2e^{-q(t-2)},\qquad t\geqslant 3.$$

由引理 A 得

$$G_q(t)\leqslant\frac{3}{4}q(t-1)e^{-q(t-1)}+\frac{1}{4}q^2(t-2)^2e^{-q(t-2)}+\sum_{k=3}^{[t]}\frac{k(1-a)a^{k-1}}{k!}q^k(t-k)^ke^{-q(t-k)},\quad t\geqslant 3 \tag{23}$$

现设 $f(a)=k(1-a)a^{k-1}$，取导数易证

$$k(1-a)a^{k-1}\leqslant\left(1-\frac{1}{k}\right)^{k-1},\qquad 0\leqslant a\leqslant 1,k\geqslant 2.$$

但是 $\left(1-\frac{1}{k}\right)^{k-1}$ 是 $k$ 的单调下降序列，故取 $k=2$ 达到最大，即有

$$k(1-a)a^{k-1}\leqslant\frac{1}{2},\qquad 0\leqslant a\leqslant 1,k\geqslant 2. \tag{24}$$

将(24) 代入(23)，得

(25)
$$
\begin{aligned}
G_q(t) &\leqslant \frac{3}{4}q(t-1)e^{-q(t-1)} \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2!}q^2(t-2)^2e^{-q(t-2)}\right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=3}^{[t]}\frac{1}{k!}q^k(t-k)^ke^{-q(t-k)}\right) \\
&= \frac{3}{4}q(t-1)e^{-q(t-1)} \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{[t]}\frac{1}{k!}q^k(t-k)^ke^{-q(t-k)} \\
&\quad - \frac{1}{2}e^{-qt} - \frac{1}{2}q(t-1)e^{-q(t-1)} \\
&\leqslant \frac{1}{2}p_q(t) + \frac{1}{4}q(t-1)e^{-q(t-1)}, \qquad t \geqslant 3.
\end{aligned}
$$

其中 $p_q(t)$ 由 §1 (9)式定义，由 §1 (10) 式得

(26)
$$
\begin{aligned}
G_q(t) &\leqslant \frac{1}{2}\exp(-(1-e^{-q})) \\
&\quad + \frac{1}{4}q(t-1)e^{-q(t-1)}, \qquad t \geqslant 3.
\end{aligned}
$$

然而当 $q \geqslant 1$，$q(t-1)e^{-q(t-1)}$在$[3,\infty)$ 是递减的（见引理 D），故由 (26) 得

(27)
$$
G_q(t) \leqslant \frac{1}{2}\exp(-(1-e^{-q})) + \frac{1}{2}qe^{-2q}, \qquad t \geqslant 3.
$$

但是 (27) 右边两项都是 $q$ 在$[1,\infty)$ 的单调下降函数，故

$$
\begin{aligned}
G_q(t) &\leqslant \frac{1}{2}\exp(-(1-e^{-q})) + \frac{1}{2}e^{-2} \\
&\quad - \frac{1}{2}e^{-1}(e^{e^{-1}} + e^{-1}) \approx \frac{1}{2}e^{-1}(1.44 + 0.368)
\end{aligned}
$$

$$\approx 0.9e^{-1} < e^{-1}. \qquad \#$$

**引理 H**

当 $q \leqslant 1$ 有

$$G_q(t) \leqslant 1/e, \qquad t \geqslant 1. \tag{28}$$

**证**:仍然分成若干步进行,但与引理 F 的划分方式不同.

1) 如果 $q(t-1) \leqslant 1$, 即当 $1 \leqslant t \leqslant 1+\frac{1}{q}$ 时,则由

$$q(t-k) = q(t-1) - q(k-1) \leqslant 1, \qquad 1 \leqslant k \leqslant t,$$

得

$$q^k(t-k)^k e^{-q(t-k)} \leqslant q(t-k)e^{-q(t-k)} \leqslant 1/e, \qquad k \geqslant 2.$$

从而有

$$\begin{aligned} G_q(t) &= \sum_{k=1}^{[t]} \frac{(1-a)a^{k-1}}{(k-1)!} q^k (t-k)^k e^{-q(t-k)} \\ &\leqslant q(t-1)e^{-q(t-1)} \sum_{k=1}^{[t]} (1-a)a^{k-1} \\ &\leqslant e^{-1} \sum_{k=1}^{[t]} (1-a)a^{(k-1)} \leqslant 1/e. \end{aligned}$$

2) 如果 $q(t-1) \geqslant 1$, 但 $q(t-2) \leqslant 2$ ,即当

$$1 + \frac{1}{q} \leqslant t \leqslant 2 + \frac{2}{q} \tag{29}$$

时,

$$q(t-k) = q(t-2) - q(k-2) \leqslant 2, \quad 2 \leqslant k \leqslant t. \tag{30}$$

于是由引理 D 有

$$q^k(t-k)^k e^{-q(t-k)} \leqslant q^k(t-2)^k e^{-q(t-2)}, \qquad t \geqslant k \geqslant 2. \tag{31}$$

因此有

$$
\begin{aligned}
(32)\qquad G_q(t) &= (1-a)q(t-1)e^{-q(t-1)} \\
&\quad + \sum_{k=2}^{[t]} \frac{(1-a)a^{k-1}}{(k-1)!} q^k (t-k)^k e^{-q(t-k)} \\
&\leqslant (1-a)q(t-1)e^{-q(t-1)} \\
&\quad + (1-a)q(t-2)e^{-q(t-2)}\left( \sum_{j}^{\infty} \frac{a^j q^j (t-2)^j}{j!} \right) \\
&= (1-a)q(t-1)e^{-q(t-1)} \\
&\quad + (1-a)q(t-2)e^{-q(t-2)}\left( e^{aq(t-2)} - 1 \right) \\
&= (1-a)\left( q(t-1)e^{-q(t-1)} - q(t-2)e^{-q(t-2)} \right) \\
&\quad + (1-a)q(t-2)e^{-(1-a)q(t-2)}.
\end{aligned}
$$

现在如果 $q(t-1)e^{-q(t-1)} \leqslant q(t-2)e^{-q(t-2)}$，则(32) 给出

$$G_q(t) \leqslant (1-a)q(t-2)e^{-(1-a)q(t-2)} \leqslant 1/e.$$

如果 $q(t-1)e^{-q(t-1)} > q(t-2)e^{-q(t-2)}$，即 $t-1 \geqslant (t-2)e^q$，因此$(t-2) \leqslant (e^q-1)^{-1} \leqslant 1/q$，故 $q(t-2) \leqslant 1$，从而

$$(33)\qquad 1 + \frac{1}{q} \leqslant t \leqslant 2 + \frac{1}{q}.$$

现将 (32) 右边看成 $a$ 的函数，即

$$
\begin{aligned}
(34)\quad f(a) &= (1-a)\left( q(t-1)e^{-q(t-1)} - q(t-2)e^{-q(t-2)} \right) \\
&\quad + (1-a)q(t-2)e^{-(1-a)q(t-2)}.
\end{aligned}
$$

对 $a$ 取 $f(a)$ 的导数

$$
\begin{aligned}
(35)\ f'(a) &= -\left( q(t-1)e^{-q(t-1)} - q(t-2)e^{-q(t-2)} \right) \\
&\quad + q(t-2)e^{-(1-a)q(t-2)}\left( (1-a)q(t-2) - 1 \right).
\end{aligned}
$$

由 (33) $q(t-2) \leqslant 1$，以及条件 $q(t-1)e^{-q(t-1)} > q(t-2)e^{-q(t-2)}$推

得 $f'(a)<0$．因此，当 $t$ 满足(33)时，$f(\cdot)$ 是 $a$ 的递减函数，从而由(32)得

$$G_q(t) \leqslant f(0) = q(t-1)e^{-q(t-1)} \leqslant 1/e.$$

3）现设 $q(t-2)\geqslant 2$，且 $q(t-3)\leqslant 3$，即

$$2 + \frac{2}{q} \leqslant t \leqslant 3 + \frac{3}{q}. \tag{36}$$

于是我们有

$$q(t-k) \leqslant q(t-3) \leqslant 3, \qquad k \geqslant 3. \tag{37}$$

由引理 D

$$q^k(t-k)^k e^{-q(t-k)} \leqslant q^k(t-3)^k e^{-q(t-3)}, \qquad k \geqslant 3. \tag{38}$$

因此

$$\begin{aligned} G_q(t) &= \sum_{k=1}^{[t]} \frac{(1-a)}{(k-1)!} a^{k-1} q^k (t-k)^k e^{-q(t-k)} \\ &\leqslant (1-a)q(t-1)e^{-q(t-1)} \\ &\quad + (1-a)aq^2(t-2)^2 e^{-q(t-2)} \\ &\quad + (1-a)q(t-3)e^{-q(t-3)}\left(\sum_{j=2}^{\infty} \frac{a^j q^j (t-3)^j}{j!}\right). \end{aligned} \tag{39}$$

从而我们有

$$\begin{aligned} G_q(t) \leqslant{} & (1-a)q(t-3)e^{-(1-a)q(t-3)} \\ & + (1-a)\left(q(t-1)e^{-q(t-1)} - q(t-3)e^{-q(t-3)}\right) \\ & + (1-a)a\left(q^2(t-2)^2 e^{-q(t-2)} - q^2(t-3)^2 e^{-q(t-3)}\right). \end{aligned} \tag{40}$$

由于 $q(t-2)\geqslant 2$ 及 $q\leqslant 1$，则

$$q(t-3) = q(t-2) - q \geqslant 2 - q \geqslant 1. \tag{41}$$

于是由引理 D 得

$$q(t-1)e^{-q(t-1)} < q(t-3)e^{-q(t-3)}.$$

因此(40)右边第二项是负的，故

(42) $$G_q(t) \leqslant (1-a)q(t-3)e^{-(1-a)q(t-3)} + (1-a)a\left(q^2(t-2)^2e^{-q(t-2)} - q^2(t-3)^2e^{-q(t-3)}\right).$$

现在如果 $q^2(t-2)^2e^{-q(t-2)} \leqslant q^2(t-3)^2e^{-q(t-3)}$，则由（42）得

$$G_q(t) \leqslant (1-a)q(t-3)e^{-(1-a)q(t-3)} \leqslant e^{-1}.$$

如果 $q^2(t-2)^2e^{-q(t-2)} \geqslant q^2(t-3)^2e^{-q(t-3)}$，即

(43) $$t-2 \geqslant (t-3)e^{q/2},$$

则有

(44) $$q^k(t-2)^ke^{-q(t-2)} \geqslant q^k(t-3)^ke^{kq/2}e^{-q(t-2)} \geqslant q^k(t-3)^ke^{-q(t-2)} = q^k(t-3)^ke^{-q(t-3)}, \quad k \geqslant 3.$$

将(44) 代入(39) 得

(45) $$\begin{aligned} G_q(t) &\leqslant (1-a)q(t-1)e^{-q(t-1)} \\ &\quad + (1-a)aq^2(t-2)^2e^{-q(t-2)} \\ &\quad + (1-a)q(t-2)e^{-q(t-2)}\left(\sum_{j=2}^{\infty}\frac{a^jq^j(t-2)^j}{j!}\right) \\ &= (1-a)q(t-2)e^{-(1-a)q(t-2)} \\ &\quad + (1-a)\left(q(t-1)e^{-q(t-1)} - q(t-2)e^{-q(t-2)}\right). \end{aligned}$$

然而因为 $q(t-1)>q(t-2)\geqslant 2>1$，故由引理 D

(46) $$q(t-1)e^{-q(t-1)} < q(t-2)e^{-q(t-2)}.$$

从（45)、(46) 得

$$G_q(t) \leqslant (1-a)q(t-2)e^{-(1-a)q(t-2)} \leqslant 1/e.$$

4) 最后，设 $l\geqslant 3$ 且

(47) $$q(t-l) \geqslant l, \qquad q(t-l-1) \leqslant l+1.$$

此时有

(48) $$q(t-k) \leqslant q(t-l-1) \leqslant l+1, \qquad k \geqslant l+1.$$

故由引理 D 有

$$q^k(t-k)^k e^{-q(t-k)} \leqslant q^k(t-l-1)^k e^{-q(t-l-1)},$$

$$k \geqslant l+1.$$

因此

(49)
$$G_q(t) = \sum_{k=1}^{[t]} \frac{(1-a)}{(k-1)!} a^{k-1} q^k (t-k)^k e^{-q(t-k)}$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{l} \frac{(1-a)}{(k-1)!} a^{k-1} q^k (t-k)^k e^{-q(t-k)}$$
$$+ (1-a) q(t-l-1) e^{-q(t-l-1)}$$
$$\times \left( \sum_{j=l}^{\infty} \frac{a^j q^j (t-l-1)^j}{j!} \right).$$

从而我们得到

(50)
$$G_q(t) \leqslant (1-a) q(t-l-1) e^{-q(t-l-1)(1-a)}$$
$$+ (1-a) \sum_{k=1}^{l} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} \left( q^k (t-k)^k e^{-q(t-k)} - q^k (t-l-1)^k e^{-q(t-l-1)} \right).$$

由 (47) 和 $q \leqslant 1$，对任意 $1 \leqslant k \leqslant l-1$ 有

(51)
$$q(t-k) \geqslant q(t-l-1) = q(t-l) - q \geqslant l-1 \geqslant k,$$
$$1 \leqslant k \leqslant l-1.$$

由引理 D，$x^j e^{-x}$ 是 $x$ 在 $[j,\infty]$ 的递减函数，故由 (51) 得

$$q^k(t-k)^k e^{-q(t-k)} \leqslant q^k (t-l-1)^k e^{-q(t-l-1)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant l-1.$$

从而 (50) 右边 $\sum$ 号下前 $l-1$ 项为负，故

(52)
$$G_q(t) \leqslant (1-a) q(t-l-1) e^{-q(t-l-1)(1-a)}$$
$$+ \frac{(1-a)}{(l-1)!} a^{l-1} \left( q^l (t-l)^l e^{-q(t-l)} - q^l (t-l-1)^l e^{-q(t-l-1)} \right).$$

现在如果 $q^l(t-l)^l e^{-q(t-l)} \leqslant q^l (t-l-1)^l e^{-q(t-l-1)}$，则

$$G_q(t) \leqslant (1-a)q(t-l-1)e^{-q(t-l-1)(1-a)} \leqslant 1/e.$$

如果 $q^l(t-l)^l e^{-q(t-l)} \geqslant q^l(t-l-1)^l e^{-q(t-l-1)}$，因此

$$(t-l) \geqslant (t-l-1)e^{q/l}.$$

于是得

$$q^k(t-l)^k e^{-q(t-l)} \geqslant q^k(t-l-1)^k e^{kq/l} e^{-q(t-l)} \geqslant q^k(t-l-1)^k e^{-q(t-l-1)}, \qquad k \geqslant l+1. \tag{53}$$

以 (53) 左边的项代入 (49) 得

$$G_q(t) \leqslant \sum_{k=1}^{l-1} \frac{(1-a)}{(k-1)!} a^{k-1} q^k (t-k)^k e^{-q(t-k)} + (1-a)q(t-l)e^{-q(t-l)} \left( \sum_{j=l-1}^{\infty} \frac{a^j q^j (t-l)^j}{j!} \right) \tag{54}$$

$$= (1-a)q(t-l)e^{-(1-a)q(t-l)} + \sum_{k=1}^{l-1} \frac{(1-a)}{(k-1)!} a^{k-1} \{ q^k (t-k)^k e^{-q(t-k)} - q^k (t-l)^k e^{-q(t-l)} \}.$$

但是

$$q(t-k) \geqslant q(t-l) \geqslant l > k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant l-1.$$

再次应用引理 D 得

$$q^k(t-k)^k e^{-q(t-k)} \leqslant q^k(t-l)^k e^{-q(t-l)}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant l-1. \tag{55}$$

由 (54)、(55)得

$$G_q(t) \leqslant (1-a)q(t-l)e^{-q(t-l)(1-a)} \leqslant 1/e.$$

因此，由2)至4) 我们已经证明，对一切

$$l + \frac{l}{q} \leqslant t \leqslant l + 1 + \frac{l+1}{q}, \qquad l \geqslant 1.$$

都有 $G_q(t) \leqslant 1/e$. 再由第 1) 步，我们就得

$$G_q(t) \leqslant 1/e, \qquad t \geqslant 1. \qquad \|$$

## 5. 本节的主要结果

引理 G 和引理 H 是本节的中心内容.下面的定理是本节的最后结果,然而它只不过是将引理 G 和 H 换一种叙述方式罢了,当然,我们正是需要这种叙述方式.

**定理** I

设 $p\in\mathscr{P}^*(q)$, $p\sim\lambda\in\Lambda_l$. 而 $\lambda$ 满足下述条件:存在 $0\leqslant a\leqslant 1$,自然数 $n\geqslant 2$,使

(56)
$$\lambda(1)=a,\quad \lambda(n)=1-a.$$

则

(57)
$$p(t)-{}_np(t)\leqslant 1/e,\qquad n\leqslant t\leqslant 2n.$$

**证**:由 §1 的(14)及(15)式我们有

$$p(t)-{}_np(t)$$
$$=\sum_{k=1}^{[t-n+1]}\frac{q^k(t-n-k+1)^k}{(k-1)!}e^{-q(t-n-k+1)}(1-a)a^{k-1},$$
$$n\leqslant t\leqslant 2n.$$

又由 $G_q(t)$ 的定义(19)式得

$$p(t)-{}_np(t)=G_q(t-n+1),\qquad n\leqslant t\leqslant 2n.$$

应用引理 G 和 H 就得(57).　#

# §3　主要结果的证明(二)

## 6. 本节的问题

固定自然数 $n\geqslant 2$. 又设有非负数列 $c_1,\cdots,c_{n-1}$满足关系

$$\sum_{j=1}^{n-1} c_j = 1. \tag{1}$$

现设 $\lambda\in \Lambda_l$, 满足

$$\lambda(j) = c_j, \qquad 1\leqslant j\leqslant n-1. \tag{2}$$

并取 $p_{qc}\in \mathscr{P}^*(q)$,使 $p_{qc}\sim\lambda$, 则由 §1 (19) 式

$$p_{qc}(t) = e^{-qt} + \sum_{k=1}^{[t]}\sum_{j=1}^{[t]}\sum_{j_1+\cdots+j_k=j}\frac{q^k(t-j)^k}{k!}e^{-q(t-j)}c_{j_1}\cdots c_{j_k}, \qquad t\in \overline{R}. \tag{3}$$

由第五章定理 V 的推论有

$$p_{qc}(t) \leqslant \exp(-(1-e^{-q})), \qquad t\geqslant 1. \tag{4}$$

现令

$$\begin{aligned} G_{qc}(t) &= (1-a)q(t-1)e^{-q(t-1)} \\ &+ \sum_{k=2}^{[t]}\frac{(1-a)a^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{j=1}^{[t]-1}\sum_{j_1+\cdots+j_{k-1}=j} c_{j_1}\cdots c_{j_{k-1}}q^k(t-j-1)^k e^{-q(t-j-1)}, \\ &\qquad 0\leqslant a\leqslant 1, t\geqslant 1. \end{aligned} \tag{5}$$

如果取 $c_1=1$, $c_j=0, 2\leqslant j\leqslant n-1$,则

$$G_{qc}(t) = G_q(t), \qquad t\geqslant 1.$$

和

$$p_{qc}(t) = p_q(t), \qquad t\in \overline{R}.$$

我们在本节的主要目的是要推广 §2 的结果,其中主要部分是证明

(6)　　$$G_{qc}(t) \leqslant 1/e, \qquad t \geqslant 1.$$

7. $q\geqslant 1$ 的情形

为了证明(6),与§2一样,我们将证明分成 $q\geqslant 1$ 和 $q\leqslant 1$ 两种情形,现在首先考虑 $q\geqslant 1$ 的情形.

对 $t\geqslant 2$,令

(7) $$F_{qc}(t) = \sum_{k=2}^{[t]} \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{[t]-1} \sum_{j_1+\cdots+j_{k-1}=j} c_{j_1}\cdots c_{j_{k-1}} q^k (t-j-1)^k e^{-q(t-j-1)}, \qquad t \geqslant 2.$$

下面的两个引理是关于 $F_{qc}$ 的简单结果.

**引理 A**

$F_{qc}(\cdot)$在定义域$[2,\infty)$有连续导数,并且

(8)　　$$F'_{qc}(t) = -q\left(F_{qc}(t) - p_{qc}(t-1) + e^{-q(t-1)}\right).$$

**证**:注意到

(9)　　$$\frac{d}{dx} q^k x^k e^{-qx} = -q\left(q^k x^k e^{-qx} - k q^{k-1} x^{k-1} e^{-qx}\right), \qquad x \geqslant 0, k \geqslant 1.$$

因此,当 $2\leqslant m<t<m+1$ 时,由(9),(7)易得

$$\begin{aligned}
F'_{qc}(t) &= -q F_{qc}(t) \\
&\quad + q\sum_{k=2}^{m} \frac{1}{(k-1)!} \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{j_1+\cdots+j_{k-1}=j} c_{j_1}\cdots c_{j_{k-1}} q^{k-1} (t-j-1)^{k-1} e^{-q(t-j-1)} \\
&= -q F_{qc}(t) + q\sum_{h=1}^{m-1} \frac{1}{h!} \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{j_1+\cdots+j_h=j} c_{j_1}\cdots c_{j_h} q^h (t-j-1)^h e^{-q(t-j-1)} \\
&= -q\left(F_{qc}(t) - p_{qc}(t-1) + e^{-q(t-1)}\right).
\end{aligned}$$

上面第二个等号中,用变换 $h=k-1$.　　#

**引理 B**

如果 $F_{qc}(\cdot)$ 在 $t_0>2$ 递增或取最大值. 则

(10) $$F_{qc}(t_0) \leqslant \exp(-(1-e^{-q})) - e^{-q(t_0-1)}.$$

**证**:由于 $F'_{qc}(t_0) \geqslant 0$,由(8)与(4)得(10). #

**引理 C**

设 $q \geqslant 1$, 令

$$h_1(t) = \left(q(t-1) - \frac{4}{9}\right)e^{-q(t-1)}, \qquad t \geqslant 4,$$

$$h_2(t) = \left(\frac{3}{4}q(t-1) - \frac{1}{2}\right)e^{-q(t-1)}, \qquad t \geqslant 4,$$

则 $h_1(\cdot)$ 和 $h_2(\cdot)$ 在 $[4,\infty)$ 单调下降. 又令

$$f(q) = \left(3q - \frac{4}{9}\right)e^{-3q}, \qquad q \geqslant 1,$$

则 $f(\cdot)$ 在 $[1,\infty)$ 单调下降.

**证**:由于 $q \geqslant 1$ ,$t \geqslant 4$ 我们有

$$h'_1(t) = -qe^{-q(t-1)}\left(q(t-1) - \frac{13}{9}\right) \leqslant 0,$$

$$h'_2(t) = -qe^{-q(t-1)}\left(\frac{3}{4}q(t-1) - \frac{5}{4}\right) \leqslant 0,$$

$$f'(q) = -e^{-3q}\left(9q - 3 - \frac{4}{3}\right) \leqslant 0.$$ #

**引理 D**

设 $q \geqslant 1$, 则有

$$G_{qc}(t) \leqslant 1/e, \qquad t \geqslant 2. \tag{11}$$

证:分成如下 4 步

1) 当 $1 \leqslant t \leqslant 2$

$$G_{qc}(t) = (1-a)q(t-1)e^{-q(t-1)} \leqslant (1-a)e^{-1}.$$

2) 当 $2 \leqslant t \leqslant 3$ ,按照 §2 引理 G 第二步的证明

$$G_{qc}(t) = (1-a)q(t-1)e^{-q(t-1)} + (1-a)ac_1q^2(t-2)^2e^{-q(t-2)} \leqslant G_q(t) \leqslant 1/e.$$

3) 当 $3 \leqslant t \leqslant 4$ 则

$$\begin{aligned}
G_{qc}(t) = {} & (1-a)q(t-1)e^{-q(t-1)} \\
& + (1-a)ac_1q^2(t-2)^2e^{-q(t-2)} \\
& + (1-a)ac_2q^2(t-3)^2e^{-q(t-3)} \\
& + \frac{1}{2!}(1-a)a^2c_1^2q^3(t-3)^3e^{-q(t-3)} \\
= {} & (1-c_1-c_2)(1-a)q(t-1)e^{-q(t-1)} \\
& + c_1\Big[(1-a)q(t-1)e^{-q(t-1)} \\
& + (1-a)aq^2(t-2)^2e^{-q(t-2)} \\
& + \frac{1}{2!}(1-a)a^2c_1^2q^3(t-3)^3e^{-q(t-3)}\Big] \\
& + c_2\Big[(1-a)q(t-1)e^{-q(t-1)} \\
& + (1-a)aq^2(t-3)^2e^{-q(t-3)}\Big] \\
= {} & (1-c_1-c_2)I_1 + c_1I_2 + c_2I_3.
\end{aligned} \tag{12}$$

其中 $I_1$、$I_2$,$I_3$ 都是上面系数后面相应的项.

显然

(13) $$I_1 \leqslant q(t-1)e^{-q(t-1)} \leqslant 1/e.$$

由 §2 引理 G 第 3 步的证明，我们有

(14) $$\begin{aligned} I_2 \leqslant &(1-a)q(t-1)e^{-q(t-1)} \\ &+ (1-a)aq^2(t-2)^2e^{-q(t-2)} \\ &+ \frac{1}{2!}(1-a)a^2q^3(t-3)^3e^{-q(t-3)} \leqslant 1/e, \quad 3 \leqslant t \leqslant 4. \end{aligned}$$

现在估计 $I_3$，如果 $q(t-1)e^{-q(t-1)} \geqslant q^2(t-3)^2e^{-q(t-3)}$，则按照 §2 引理 A

(15) $$I_3 \leqslant q(t-1)e^{-q(t-1)} \leqslant 1/e.$$

如果 $q(t-1)e^{-q(t-1)} < q^2(t-3)^2e^{-q(t-)}$，则由 §2 引理 A

$$I_3 \leqslant \frac{3}{4}q(t-1)e^{-q(t-1)} + \frac{1}{4}q^2(t-3)^2e^{-q(t-3)},$$

$$3 \leqslant t \leqslant 4.$$

由 §2 引理 D，$x^2e^{-x} \leqslant 4e^{-2}(x \geqslant 0)$，而 $xe^{-x}$ 在 $[1,\infty)$ 下降，故由 $q \geqslant 1$ 及 $t \geqslant 3$ 得

(16) $$I_3 \leqslant \frac{3}{4}2e^{-2} + e^{-2} = \frac{5}{2}e^{-2} = 2.5e^{-1}e^{-1} < e^{-1}.$$

将(13) 至(16) 代入 (12) 得

$$G_{qc}(t) \leqslant 1/e, \qquad 3 \leqslant t \leqslant 4.$$

4) 最后，假定 $4 \leqslant l \leqslant t \leqslant l+1$，其中 $l$ 是自然数. 此时我们有

(17) $$\begin{aligned} G_{qc}(t) = &(1-a)q(t-1)e^{-q(t-1)} \\ &+ (1-a)a\sum_{k=1}^{l-1}c_kq^2(t-k-1)^2e^{-q(t-k-1)} \\ + \sum_{k=3}^{l}&\frac{k(1-a)a^{k-1}}{k!}\sum_{j=1}^{l-1}\sum_{j_1+\cdots+j_{k-1}=j}c_{j_1}\cdots c_{j_{k-1}}q^k(t-j-1)^ke^{-q(t-j-1)} \end{aligned}$$

其中我们恒约定

(18) $$c_j = 0, \qquad n \leqslant j < \infty.$$

现在我们将(17)又分成两种情形

情形A. 如果

$$\sum_{k=1}^{t-1} c_k q^2 (t-k-1)^2 e^{-q(t-k-1)} \leqslant q(t-1)e^{-q(t-1)},$$

则由§2引理A

$$(19)\qquad (1-a)q(t-1)e^{-q(t-1)} + \sum_{k=1}^{t-1} c_k q^2 (t-k-1)^2 e^{-q(t-k-1)} a(1-a) \leqslant q(t-1)e^{-q(t-1)}.$$

其次,如§2(24)式的证明,我们有

$$(20)\qquad k(1-a)a^{k-1} \leqslant \frac{4}{9}, \qquad k \geqslant 3, 0 \leqslant a \leqslant 1.$$

将(19)、(20)代入(17)得

$$(21)\quad G_{qc}(t) \leqslant q(t-1)e^{-q(t-1)} + \frac{4}{9}\sum_{k=3}^{t}\frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{t-1}\sum_{j_1+\cdots+j_{k-1}=j} c_{j_1}\cdots c_{j_{k-1}} q^k (t-j-1)^k e^{-q(t-j-1)}$$
$$\leqslant q(t-1)e^{-q(t-1)} + \frac{4}{9}F_{qc}(t).$$

其中 $F_{qc}(\cdot)$ 如(7)所定义,因为 $q \geqslant 1$,(21)中右边第一项在 $[4,\infty)$ 单调下降. 因此,(21)右边在某点 $t_0 \geqslant 4$ 达到最大,只可能或者:$t_0 = 4$,或者:$t_0 > 4$,而在 $t_0$ 处 $F_{qc}(\cdot)$ 单调上升或者取最大值. 在第一种可能情形,即(21)右边在 $t_0 = 4$ 取最大值,则在第3)步已证 $G_{qc}(t) \leqslant 1/e$ $(4 \geqslant t)$. 在第二种情形,则有

$$(22)\quad G_{qc}(t) \leqslant q(t_0-1)e^{-q(t_0-1)} + \frac{4}{9}F_{qc}(t_0), \qquad t \geqslant 4.$$

此时由引理B得

$$(23)\qquad G_{qc}(t) \leqslant q(t_0-1)e^{-q(t_0-1)}$$

$$+\frac{4}{9}\exp(-(1-e^{-q}))-\frac{4}{9}e^{-q(t_0-1)}$$

$$=\left(q(t_0-1)-\frac{4}{9}\right)e^{-q(t_0-1)}$$

$$+\frac{4}{9}\exp(-(1-e^{-q})).$$

再由引理C，上式右边第一项是 $t_0$ 在 $[4,\infty)$ 单调下降的，故

$$G_{qc}(t)\leqslant\left(3q-\frac{4}{9}\right)e^{-3q}+\frac{4}{9}\exp(-(1-e^{-q})),\quad t\geqslant 4.$$

仍由引理C，最后得

$$G_{qc}(t)\leqslant\left(3-\frac{4}{9}\right)e^{-3}+\frac{4}{9}e^{-(1-e^{-1})} \tag{24}$$

$$\approx 0.35e^{-1}+0.64e^{-1}<e^{-1}.$$

情形B. 如果

$$\sum_{k=1}^{t-1}c_kq^2(t-k-1)^2e^{-q(t-k-1)}\geqslant q(t-1)e^{-q(t-1)}. \tag{25}$$

则由§2 引理A

$$(1-a)q(t-1)e^{-q(t-1)} \tag{26}$$

$$+\sum_{k=1}^{t-1}c_kq^2(t-k-1)^2e^{-q(t-k-1)}$$

$$\leqslant\frac{3}{4}q(t-1)e^{-q(t-1)}$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{t-1}c_kq^2(t-k-1)^2e^{-q(t-k-1)}.$$

又取 $k\geqslant 2$ 时，$k(1-a)a^{k-1}\leqslant\left(1-\frac{1}{k}\right)^{k-1}\leqslant\frac{1}{2}$，代入（17）变成

$$G_{qc}(t)=\frac{3}{4}q(t-1)e^{-q(t-1)}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{t-1}\frac{1}{2!}c_kq^2(t-k-1)^2e^{-q(t-k-1)}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{t}\frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{t-1}\sum_{j_1+\cdots+j_{k-1}=j}c_{j_1}\cdots c_{j_{k-1}}q^k(t-j-1)^ke^{-q(t-j-1)}$$

$$=\frac{3}{4}q(t-1)e^{-q(t-1)}+\frac{1}{2}F_{qc}(t),\quad t\geqslant 4.$$

与情形 A 完全相同的讨论,我们得

$$G_{qc}(t)\leqslant\left(\frac{3}{4}q(t-1)-\frac{1}{2}\right)e^{-q(t-1)}+\frac{1}{2}e^{-(1-e^{-q})}.$$

由引理 C 得

$$\begin{aligned}G_{qc}(t)&\leqslant\left(\frac{9}{4}q-\frac{1}{2}\right)e^{-3q}+\frac{1}{2}e^{-(1-e^{-1})}\\&\leqslant\left(\frac{9}{4}-\frac{1}{2}\right)e^{-3}+\frac{1}{2}e^{-(1-e^{-1})}\\&\leqslant\frac{7}{4}e^{-2}+\frac{1}{2}e^{e^{-1}}\\&\leqslant(0.237+0.72)e^{-1}<e^{-1},\qquad t\geqslant 4.\qquad \#\end{aligned}$$

## 8. $q\leqslant 1$ 的情形

现在考虑 $q\leqslant 1$ 的情形.

我们注意到,在 $q\geqslant 1$ 的情形,上面引理 D 的证明,基本上是重复 § 2 引理 G 的证明步骤. 对 $q\leqslant 1$ 的情形,(6)式的证明已不能重复 § 2 引理 H 的步骤了. 而是在 § 2 引理 H 的基础上完成其证明的.

首先叙述几个一般性引理.

### 引理 E

设 $(a_i,i\in N)$, $(b_i,i\in N)$ 是两个非负实数序列,满足条件:对任

意正整数 $h$ 有

(27)
$$\sum_{i=1}^{h} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{h} b_i.$$

又设 $(d_i, i \in N)$ 是非负非增序列，即

$$d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots, \qquad d_h \geqslant 0,\ h \in N.$$

则对任意 $h \in N$ 有

(28)
$$\sum_{i=1}^{h} a_i d_i \leqslant \sum_{i=1}^{h} b_i d_i.$$

**证：**当 $h=1$，(28)由(27)直接得到．如果 $h>1$，则

$$\sum_{i=1}^{h} b_i d_i - \Big(\sum_{i=1}^{h} b_i\Big) d_h = \sum_{j=1}^{h-1} \Big(\sum_{i=1}^{j} b_i\Big)(d_j - d_{j+1})$$

$$\geqslant \sum_{j=1}^{h-1} \Big(\sum_{i=1}^{j} a_i\Big)(d_j - d_{j+1})$$

$$= \sum_{i=1}^{h} a_i d_i - \Big(\sum_{i=1}^{h} a_i\Big) d_h.$$

从而

$$\sum_{i=1}^{h} b_i d_i - \sum_{i=1}^{h} a_i d_i \geqslant \Big(\Big(\sum_{i=1}^{h} b_i\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{h} a_i\Big)\Big) d_h \geqslant 0. \qquad \#$$

## 引理 F

设 $(a_i, i \in N)$，$(b_i, i \in N)$ 是两个非负实数序列适合条件(27)．又设 $(d_i, i \in N)$ 是非负非减序列：

$$0 \leqslant d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots$$

则对任意 $h \in N$ 有

(29)
$$\sum_{i=1}^{h} b_i d_i \leqslant \sum_{i=1}^{h} a_i d_i + \Big(\sum_{i=1}^{h} b_i - \sum_{i=1}^{h} a_i\Big) d_h.$$

证:如果 $h>1$,因为 $d_j \leqslant d_{j+1}(j \in N)$,我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{h} b_i d_i - \sum_{i=1}^{h} b_i d_h &= \sum_{j=1}^{h-1}\left(\sum_{i=1}^{j} b_i\right)(d_j - d_{j+1}) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{h-1}\left(\sum_{i=1}^{j} a_i\right)(d_j - d_{j+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{h} a_i d_i - \sum_{i=1}^{h} a_i d_h.\end{aligned}$$

从而

$$\sum_{i=1}^{h} b_i d_i \leqslant \sum_{i=1}^{h} a_i d_i + \left(\sum_{i=1}^{h} b_i - \sum_{i=1}^{h} a_i\right) d_h \geqslant 0. \qquad \#$$

**引理 G**

设 $(a_i, i \in N)$,$(b_i, i \in N)$ 是两个非负实数序列满足条件:存在自然数 $n_0>1$ 使得:

$$(30) \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{h} a_i \geqslant \sum_{i=1}^{h} b_i, & 1 \leqslant h \leqslant n_0 - 1, \\ \sum_{i=1}^{n_0} a_i = \sum_{i=1}^{n_0} b_i, & \\ \sum_{i=1}^{n_0+h} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{n_0+h} b_i, & h \in N. \end{cases}$$

又设 $(d_i, i \in N)$)是在 $n_0$ 前不减在 $n_0$ 后不增的序列

$$(31) \qquad d_1 \leqslant \cdots \leqslant d_{n_0} \geqslant d_{n_0+1} \geqslant \cdots$$

则

$$\sum_{i=1}^{n_0+h} a_i d_i \leqslant \sum_{i=1}^{n_0+h} b_i d_i, \qquad h \in N.$$

证:由引理 F(注意条件(27)与条件(30)中第一行与第二行

$(a_i, 1\leqslant i\leqslant n_0)$与$(b_i, 1\leqslant i\leqslant n_0)$ 满足相反的不等式)得

$$\sum_{i=1}^{n_0} a_i d_i \leqslant \sum_{i=1}^{n_0} b_i d_i + \left(\sum_{i=1}^{n_0} a_i - \sum_{i=1}^{n_0} b_i\right) d_{n_0}.$$

但由条件 (30)第二行,上式成为

$$\sum_{i=1}^{n_0} a_i d_i \leqslant \sum_{i=1}^{n_0} b_i d_i. \tag{32}$$

因此将引理 E 用到序列 $(n_0+h, h\in N)$ 及(30)、(31) 得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n_0+h} a_i d_i &= \sum_{i=1}^{n_0} a_i d_i + \sum_{i=n_0+1}^{n_0+h} a_i d_i \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n_0} b_i d_i + \sum_{i=n_0+1}^{n_0+h} b_i d_i \\ &= \sum_{i=1}^{n_0+h} b_i d_i, \qquad h \in N.\end{aligned}$$

#

下面我们恒假定 $(c_i, 1\leqslant i\leqslant n-1)$ 满足条件(1) ,即 $c_i\geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n-1} c_i = 1$. 为方便起见,恒约定

$$c_i = 0, \qquad i \geqslant n. \tag{33}$$

在上述 $(c_i, i\in N)$ 的假定下,令

$$a_{k,l} = \sum_{j_1+\cdots+j_k=l} c_{j_1}\cdots c_{j_k}, \qquad k \in N, l \in N, l \geqslant k. \tag{34}$$

显然有

$$a_{1,l} = c_l, \qquad l \in N. \tag{35}$$

**引理 H**

对任意 $k\in N$, $h\in \overline{N}$ 有

$$\sum_{l=k+1}^{k+1+h} a_{k+1,l} \leqslant \sum_{l=k}^{k+h} a_{k,l} \quad . \tag{36}$$

证:由定义

$$\sum_{l=k+1}^{k+1+h} a_{k+1,l} = \sum_{l=k+1}^{k+1+h} \sum_{j_1+\cdots+j_{k+1}=l} c_{j_1}\cdots c_{j_{k+1}}$$

$$= \sum_{l=k+1}^{k+1+h} \sum_{j_{k+1}=1}^{h+1} c_{j_{k+1}} \sum_{j_1+\cdots+j_k=l-j_{k+1}} c_{j_1}\cdots c_{j_k}$$

$$\leqslant \sum_{l=k}^{k+h} \sum_{j_1+\cdots+j_k=l} c_{j_1}\cdots c_{j_k}\Big(\sum_{i=1}^{h+1} c_i\Big)$$

$$\leqslant \sum_{l=k}^{k+h} a_{k,l}. \qquad \#$$

注:在(36)中令左边的 $l=k+i$,右边的 $l=k+i-1$,则(36)可以写成下面更方便的形式.

(37)
$$\sum_{i=1}^{h} a_{k+1,k+i} \leqslant \sum_{i=1}^{h} a_{k,k+i-1}.$$

引理 I

固定 $k\in N$,$n_0\in N$,$n_0>1$,令 $(b_i, i\in N)$ 如次

(38)
$$b_i = \begin{cases} a_{k+1,i+k}, & 1\leqslant i\leqslant n_0-1, \\ \sum_{i=1}^{n_0} a_{k,i+k-1} - \sum_{i=1}^{n_0-1} a_{k+1,i+k}, & i=n_0, \\ a_{k,i+k-1}, & i>n_0. \end{cases}$$

则

(39)
$$\sum_{i=1}^{h} a_{k+1,i+k} \leqslant \sum_{i=1}^{h} b_i, \qquad h\in N.$$

和

(40)
$$\sum_{i=1}^{n_0+h} a_{k,i+k-1} \leqslant \sum_{i=1}^{n_0+h} b_i, \qquad h\in N.$$

**证**:由定义(38)

$$\sum_{i=1}^{n_0} b_i = \sum_{i=1}^{n_0-1} b_i + b_{n_0} = \sum_{i=1}^{n_0} a_{k,i+k-1}. \tag{41}$$

现证(39). 当 $k \leqslant n_0-1$ 时,由定义(38) 第一行得

$$\sum_{i=1}^{k} b_i = \sum_{i=1}^{k} a_{k+1,i+k}. \tag{42}$$

当 $k \geqslant n_0$ 时,由 (41) 及定义 $b_i$ 的 (38)中第二、三行立得

$$\sum_{i=1}^{k} b_i = \sum_{i=1}^{n_0} b_i + \sum_{i=n_0+1}^{k} b_i = \sum_{i=1}^{k} a_{k,i+k-1}. \tag{43}$$

由引理 H 的注和(42)、(43) 即得(39) 和(40).　#

现在再引进一个方便的缩写记号,令

$$d_i^{(k)} = q^k(t-k-i+1)^k e^{-q(t-k-i+1)}, \tag{44}$$

$$t \in R\ ,\ k \in N\ ,\ i \in \overline{N}\ ,\ k+i \leqslant [t]+1\ .$$

$d_i^{(k)}$ 实际上还有两个变量 $t$ 和 $q$ 没有明确表示出来. 我们在后面的一些运算中,只对 $k,i$ 的变化作运算,而将 $q,t$ 总看成是固定的.

**引理 J**

假定 $q \leqslant 1$ , $k \in N$ , $q(t-k) \geqslant k$ , $q(t-k-1) < k+1$. 则存在非负整数 $r_1, r_2, \cdots, r_{[t]}$使

$$r_1 > r_2 > \cdots > r_k \geqslant r_{k+1} = r_{k+2} = \cdots = r_{[t]} = 1. \tag{45}$$

且对任意 $1 \leqslant j \leqslant [t]$

$$d_1^{(j)} < \cdots < d_{r_j}^{(j)} \geqslant d_{r_j+1}^{(j)} > \cdots > d_{[t]-j+1}^{(j)}. \tag{46}$$

**证**:由 § 2 引理 D , $x^j e^{-x} (x \geqslant 0)$ 在 $[0,j]$ 单调上升,而在$[j,\infty)$ 单调下降.

现在 $q(t-k)\geqslant k$ 而 $q(t-k-1)\leqslant k+1$ 及 $q\leqslant 1$，因此对任意 $1\leqslant j\leqslant k$，存在 $l_j\in N$ 使

(47) $$q(t-j-l_j+1)\geqslant j,\quad q(t-j-l_j)<j.$$

因此由§2引理D给出

$$\begin{aligned} d_1^{(j)}&<\cdots<d_{l_j}^{(j)}\\ &=q^j(t-j-l_j+1)^j e^{-q(t-j-l_j+1)}\\ &\leqslant j^j e^{-j}>q^j(t-j-l_j)^j e^{-q(t-j-l_j)}\\ &=d_{l_j+1}^{(j)}>d_{l_j+2}^{(j)}>\cdots>d_{[t]-j+1}^{(j)}. \end{aligned}$$

现在对 $1\leqslant j\leqslant k$，令

(48) $$r_j=\begin{cases} l_j, & 若\ d_{l_j}^{(j)}\geqslant d_{l_j+1}^{(j)}.\\ l_j+1, & 若\ d_{l_j}^{(j)}<d_{l_j+1}^{(j)}. \end{cases}$$

而对 $k+1\leqslant j\leqslant[t]$，令 $r_j=1$. 则我们显然有

(49) $$r_1>r_2>\cdots>r_k\geqslant r_{k+1}=\cdots=r_{[t]}=1.$$

而且

(50) $$d_1^{(j)}<\cdots<d_{r_j}^{(j)}\geqslant d_{r_j+1}^{(j)}>\cdots>d_{[t]-j+1}^{(j)}.\qquad \#$$

现在我们可以给出本节的主要引理了. 首先注意，(5) 式定义的 $G_{q,c}(\cdot)$ 可以用 (34) 和 (44) 的记号表成

(51) $$\begin{aligned} G_{q,c}(t)&=(1-a)q(t-1)e^{-q(t-1)}\\ &+\sum_{k=2}^{[t]}\frac{(1-a)a^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{j=1}^{[t]-1}\sum_{j_1+\cdots+j_{k-1}=j}c_{j_1}\cdots c_{j_{k-1}}q^k(t-j-1)^k e^{-q(t-j-1)}\\ &=(1-a)q(t-1)e^{-q(t-1)}\\ &\quad+\sum_{k=2}^{[t]}\frac{(1-a)a^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{l=k-1}^{[t]-1}a_{k-1,l}d_{l-k+2}^{(k)},\qquad t\geqslant 1. \end{aligned}$$

或者在上式的下标中，令 $l=i+k-2$ 得

(52) $$G_{q,c}(t)=(1-a)q(t-1)e^{-q(t-1)}$$

$$+\sum_{k=2}^{[t]}\frac{(1-a)a^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{i=1}^{[t]-k+1}a_{k-1,i+k-2}d_i^{(k)},\qquad t\geqslant 1.$$

**引理 K**

设 $q\leqslant 1$，则

$$G_{q,c}(t)\leqslant 1/e,\qquad t\geqslant 1. \tag{53}$$

**证**:仍然将证明分成若干步.

1) 设 $q(t-1)\leqslant 1$，这一步的证明与 § 2 引理 H 的 1)相似. 此时有

$$q^k(t-k)^k e^{-q(t-k)}\leqslant q(t-1)e^{-q(t-1)},\qquad t\geqslant 1, k\geqslant 2.$$

从而

$$\begin{aligned}G_{q,c}(t)&=(1-a)q(t-1)e^{-q(t-1)}\\&+\sum_{k=2}^{[t]}\frac{(1-a)a^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{j=1}^{[t]-1}\sum_{j_1+\cdots+j_{k-1}=j}c_{j_1}\cdots c_{j_{k-1}}q^k(t-j-1)^k e^{-q(t-j-1)}\\&\leqslant(1-a)q(t-1)e^{-q(t-1)}\\&\quad+\sum_{k=2}^{[t]}\frac{(1-a)a^{k-1}}{(k-1)!}\Big(\sum_{i=1}^{s-1}c_i\Big)^{k-1}q(t-1)e^{-q(t-1)}\\&\leqslant q(t-1)e^{-q(t-1)}\sum_{k=1}^{\infty}(1-a)a^{k-1}\leqslant 1/e.\end{aligned}$$

2) 现设 $q(t-1)\geqslant 1$ 而 $q(t-2)\leqslant 2$，此时由引理 J 存在

$$r_1\geqslant r_2=r_3=\cdots=r_{[t]}=1, \tag{54}$$

使得

$$d_1^{(1)}<\cdots<d_{r_1}^{(1)}\geqslant d_{r_1+1}^{(1)}>\cdots>d_{[t]}^{(1)}. \tag{55}$$

及

$$d_1^{(j)}\geqslant d_2^{(j)}>\cdots>d_{[t]-j+1}^{(j)},\qquad 2\leqslant j\leqslant[t]. \tag{56}$$

现在我们取

$$(57)\qquad b_i=\begin{cases}c_i, & 1\leqslant i\leqslant r_1-1,\\ 1-\sum_{k=1}^{r_1-1}c_k, & i=r_1,\\ 0, & i>r_1.\end{cases}$$

显然 $b_i\geqslant 0$ $(i\in N)$ 且 $\sum_{i=1}^{r_1}b_i=1$. 于是由(55)得

$$(58)\qquad d_1^{(1)}\leqslant\sum_{i=1}^{r_1}b_id_i^{(1)}.$$

(58)即是下式的缩写

$$(59)\qquad q(t-1)e^{-q(t-1)}\leqslant\sum_{i=1}^{r_1}b_iq(t-i)e^{-q(t-i)}.$$

现设 $j\geqslant 2$ 由引理H的注:

$$(60)\qquad \sum_{i=1}^{h}a_{j-1,i+j-2}\leqslant\sum_{i=1}^{h}a_{1,i}=\sum_{i=1}^{h}c_i\leqslant\sum_{i=1}^{h}b_i,\ h\geqslant 1.$$

其中$(b_i,i\in N)$由(57)定义，并注意 $c_i=a_{1,i}$.

现由(60)、(56)及引理E得

$$(61)\qquad \sum_{i=1}^{[t]-j+1}a_{j-1,i+j-2}d_i^{(j)}\leqslant\sum_{i=1}^{[t]-j+1}b_id_i^{(j)},\qquad j\geqslant 2.$$

从而由(52)、(59)、(61)得

$$G_{q,c}(t)\leqslant\sum_{i=1}^{r_1}b_iG_q(t-i+1)\leqslant 1/e,\qquad t\geqslant 1.$$

其中 $G_q(\cdot)$ 由§2(19)定义，由§2引理G, $G_q(t)\leqslant 1/e$.

3) 现设 $q(t-2)\geqslant 2$ 且 $q(t-3)\leqslant 3$. 由引理J存在

$$(62)\qquad r_1>r_2\geqslant r_3=\cdots=r_{[t]}=1,$$

使得

$$(63)\qquad d_1^{(1)}<\cdots<d_{r_1}^{(1)}\geqslant d_{r_1+1}^{(1)}>\cdots>d_{[t]}^{(1)},$$

$$(64)\qquad d_1^{(2)}<\cdots<d_{r_2}^{(2)}\geqslant d_{r_2+1}^{(2)}>\cdots>d_{[t]-1}^{(2)},$$

$$(65)\qquad d_1^{(j)}\geqslant d_2^{(j)}>\cdots>d_{[t]-j+1}^{(j)},\qquad 3\leqslant j\leqslant[t].$$

我们取

$$
(66)\qquad b_i=\begin{cases} a_{2,i+2-1}, & 1\leqslant i\leqslant r_2-1,\\ \sum_{k=1}^{r_2}c_k-\sum_{k=1}^{r_2-1}b_k, & i=r_2,\\ c_i, & r_2+1\leqslant i\leqslant r_1-1,\\ 1-\sum_{k=1}^{r_1-1}b_k, & i=r_1,\\ 0, & i>r_1. \end{cases}
$$

现在我们需要证明

$$
(67)\qquad G_{q,c}(t)\leqslant\sum_{i=1}^{r_1}b_iG_q(t-i+1)\leqslant 1/e\,.
$$

由 (63) 显然有

$$
(68)\qquad q(t-1)e^{-q(t-1)}=d_1^{(1)}\leqslant\sum_{i=1}^{r_1}b_iq(t-i)e^{-q(t-i)}.
$$

因此,证明 (67), 只须对 $j\geqslant 2$ 证明

$$
(69)\qquad \sum_{i=1}^{[t]-j+1}a_{j-1,i+j-2}d_i^{(j)}\leqslant\sum_{i=1}^{r_1}b_id_i^{(j)}=\sum_{i=1}^{[t]-j+1}b_id_i^{(j)}.
$$

其中 $d_i^{(j)}=0$,当 $i>[t]-j+1$. 由引理 I 、引理 G ,(37)和(35)式及定义(66)得

$$
(70)\qquad \sum_{i=1}^{[t]-1}a_{1,i}\,d_i^{(2)}\leqslant\sum_{i=1}^{r_1}b_id_i^{(2)}.
$$

而对 $j\geqslant 3$, 由 (65) 及引理 E , (69) 成立,从而 (67) 自然成立.

4) 现对任意 $k\geqslant 2$ ,假定 $q(t-k)\geqslant k$ 且 $q(t-k-1)\leqslant k+1$. 则由引理 J, 存在

$$
r_1>r_2>\cdots>r_k\geqslant r_{k+1}=\cdots=r_{[t]}=1,
$$

使对任意 $1\leqslant j\leqslant[t]$ 有

$$
d_1^{(j)}<\cdots<d_{r_j}^{(j)}\geqslant d_{r_j+1}^{(j)}>\cdots>d_{[t]-j+1}^{(j)}.
$$

现取$(b_i,i\in N)$ 如下:

$$b_i = \begin{cases} a_{k,k+i-1}, & 1 \leqslant i \leqslant r_k - 1, \\ \sum\limits_{h=1}^{r_k} a_{k-1,k+h-2} - \sum\limits_{h=1}^{r_k-1} b_h, & i = r_k. \end{cases}$$

而对任意 $1 < j \leqslant k-1$，令

$$b_i = \begin{cases} a_{j,j+i-1}, & r_{j+1} + 1 \leqslant i \leqslant r_j - 1, \\ \sum\limits_{h=1}^{r_j} a_{j-1,j+h-2} - \sum\limits_{h=1}^{r_j-1} b_h, & i = r_j. \end{cases}$$

又令

$$b_i = \begin{cases} a_{1,i}, & r_2 + 1 \leqslant i \leqslant r_1 - 1, \\ 1 - \sum\limits_{h=1}^{r_1-1} b_h, & i = r_1, \\ 0, & i > r_1. \end{cases}$$

现在我们断言：

(71)　　$$G_{q,c}(t) \leqslant \sum_{i=1}^{r_1} b_i G_q(t - i + 1) \leqslant 1/e .$$

(71) 的证明 只须简单应用引理 E 至 J 并重复第 3) 步证明即可.

#

## 9. 本节的主要结果

由引理 D 和 K 就可以获得本节的主要结果，它是定理 I 的推广.

### 定理 I

设 $p \in \mathscr{P}^*(q)$，$p \sim \lambda \in \Lambda_l$，而 $\lambda$ 满足下述条件：存在 $0 \leqslant a \leqslant 1$，自然数 $n \geqslant 2$，以及非负实数 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}$，使 $\sum\limits_{j=1}^{n-1} c_j = 1$，且

(72)　　$$\lambda(j) = c_j a,\ 1 \leqslant j \leqslant n-1, \lambda(n) = 1 - a.$$

则

(73)　　$p(t) - {}_n p(t) \leqslant 1/e, \qquad n \leqslant t \leqslant 2n.$

**证**：由 §1 (19)、(20) 及本节(5) 式，当 $n \leqslant t \leqslant 2n$ 时有

$$
\begin{aligned}
& p(t) - {}_n p(t) \\
= & \sum_{k=1}^{[t]} \sum_{j=1}^{[t]} \sum_{j_1+\cdots+j_k=j} a_{j_1} \cdots a_{j_k} \frac{q^k (t-j)^k}{k!} e^{-q(t-j)} \\
& - \sum_{k=1}^{[t]} \sum_{j=1}^{[t]} \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_k=j \\ 1 \leqslant j_1, \cdots, j_k < n}} a_{j_1} \cdots a_{j_k} \frac{q^k (t-j)^k}{k!} e^{-q(t-j)} \\
= & (1-a) q (t-n) e^{-q(t-n)} \\
& + \sum_{k=2}^{[t]} \sum_{j=1}^{[t]-n} \sum_{j_1+\cdots+j_{k-1}=j} \frac{(1-a)a^{k-1}}{(k-1)!} c_{j_1} \cdots c_{j_{k-1}} q^k (t-n-j)^k e^{-q(t-n-j)} \\
= & G_{q,c}(t-n+1) \leqslant 1/e.
\end{aligned}
$$

#

# §4　主要结果的证明（三）

## 10. 尺度变换

设 $p \in \mathscr{P}$，任意实数 $b > 0$．令

(1)　　$p_1(t) = p(bt), \qquad t \geqslant 0.$

则显然 $p_1 \in \mathscr{P}$，但是 $p$ 的典型测度与 $p_1$ 的典型测度却又不相同了．

### 引理 A

设 $p \in \mathscr{P}^*(q)$，$\lambda \in \Lambda_l$ 且 $p \sim \lambda$．又设 $p_1$ 由 (1) 式定义，其中 $0 < b < \infty$．则 $p_1 \in \mathscr{P}^*(bq)$．又以 $\lambda_1$ 记 $p_1$ 对应的典型测度分布，即 $\lambda_1 \in \Lambda_l$ 且 $p_1 \sim \lambda_1$．则

(2)　　$\lambda_1(A) = \lambda(bA), \qquad A \in \mathscr{B}(0, \infty].$

其中 $bA=\{bx:x\in A\}$.

**证**：因为 $-p'(0)=q$，故 $p'(1)=bq$，从而 $p_1\in\mathscr{P}^*(bq)$，为证(2)，考虑 $p_1$ 与 $p$ 的拉氏变换之间的关系，我们有

$$(3)\qquad \psi_{p_1}(\theta)=\int_0^\infty p_1(t)e^{-\theta t}dt=\int_0^\infty p(bt)e^{-\theta t}dt$$
$$=\frac{1}{b}\int_0^\infty p(t)e^{-\theta t/b}dt=\psi_p(\theta/b)\big/b,\qquad \theta>0.$$

从而由第三章定理 I 立即得到(2). #

**引理 B**

设 $p\in\mathscr{P}^*(q)$，$p\sim\lambda\in\Lambda_l$，而 $\lambda$ 满足条件：存在 $0\leqslant a\leqslant 1$，$b\in R$，自然数 $n\geqslant 2$，以及非负实数 $c_1,\cdots,c_{n-1}$，$\sum_{j=1}^{n-1}c_j=1$ 使

$$(4)\qquad \lambda(bj)=c_ja,\qquad 1\leqslant j\leqslant n-1,\ \lambda(nb)=1-a.$$

则

$$(5)\qquad p(t)-{}_{nb}p(t)\leqslant 1/e,\qquad nb\leqslant t\leqslant 2nb.$$

**证**：由引理 A 与定理 I 直接得到. #

## 11. 主要定理的证明

现在我们叙述和证明本章的主要定理，定理 I 及定理 II 只不过是主要定理的特殊情形罢了.

**定理 III**

设 $p\in\mathscr{P}$，$0<\tau<\infty$，则

$$(6)\qquad p(t)-{}_\tau p(t)\leqslant 1/e,\qquad \tau\leqslant t\leqslant 2\tau.$$

**证**：1) 首先设 $p\in\mathscr{P}^*(q)$，$p\sim\lambda\in\Lambda_l$，$\lambda$ 适合条件：$\lambda((0,\tau])=1$.

在上述条件下，对任意 $m\in N$，令 $\lambda_m$ 如下：

$$(7)\qquad \lambda_m\left(\frac{k\tau}{m}\right)=\lambda\left(\left(\frac{k-1}{m}\tau,\frac{k}{m}\tau\right]\right),\qquad 1\leqslant k\leqslant m.$$

则 $\lambda_m\in\Lambda_l$. 现取 $p_m\in\mathscr{P}^*(q)$，使得 $p_m\sim\lambda_m$. 于是由引理 B 得

$$p_m(t)-{}_\tau p_m(t)\leqslant 1/e,\qquad \tau\leqslant t\leqslant 2\tau.$$

令 $m\to\infty$，易见 $p_m\overset{T}{\Rightarrow}p$，${}_\tau p_m\overset{T}{\Rightarrow}{}_\tau p$，故（第三章定理 Ⅱ）

$$\lim_{m\to\infty}p_m(t)=p(t),\ \lim_{m\to\infty}{}_\tau p_m(t)={}_\tau p(t),\qquad t\in\overline{R}.$$

从而我们有

$$(8)\qquad p(t)-{}_\tau p(t)\leqslant 1/e,\qquad \tau\leqslant t\leqslant 2\tau.$$

现由 §1 (1) 式

$$(9)\qquad p(t)-{}_\tau p(t)=\int_{[\tau,t)}f({}_\tau\lambda,t-s)\lambda(ds)$$

$$=\lambda(\{\tau\})f({}_\tau\lambda,t-\tau),\qquad \tau\leqslant t\leqslant 2\tau.$$

如果 $\lambda(\{\tau\})=0$，自然有 $p(t)-{}_\tau p(t)=0$，$\tau\leqslant t\leqslant 2\tau$. 如果 $\lambda(\{\tau\})>0$，则

$$(10)\ f({}_\tau\lambda,t-\tau)\leqslant\frac{1}{1-\lambda((0,\tau))}\cdot\frac{1}{e},\qquad \tau\leqslant t\leqslant 2\tau.$$

注意，$f({}_\tau\lambda,\eta)$ $(0\leqslant\eta\leqslant\tau)$ 只与 $\lambda$ 在 $(0,\tau)$ 之间的值有关.

2) 现设 $p\in\mathscr{P}^*(q)$，$p\sim\lambda\in\Lambda_l$，$\tau>0$.

此时由一般公式

$$(11)\quad p(t)-{}_\tau p(t)=\int_{[\tau,t)}f({}_\tau\lambda,t-s)\lambda(ds),\qquad \tau\leqslant t\leqslant 2\tau.$$

由(10)得

$$(12)\quad p(t)-{}_\tau p(t)\leqslant\frac{1}{1-\lambda((0,\tau))}\lambda([\tau,t))\cdot\frac{1}{e}\leqslant\frac{1}{e},$$

$$\tau\leqslant t\leqslant 2\tau.$$

3) 现设 $p\in\mathscr{P}$，$\tau>0$，我们证 (6) 式.

设 $\mu\in\Lambda$，$p\sim\mu$. $\varepsilon>0$. 令

$$\mu_\varepsilon(t)=\mu(A\cap[\varepsilon,\infty]),\qquad A\in\mathscr{B}(0,\infty].$$

并取 $p_\varepsilon \in \mathscr{P}$，使 $p_\varepsilon \sim \mu_\varepsilon$，则由(12)

$$p_\varepsilon(t) - {}_\tau p_\varepsilon(t) \leqslant 1/e, \qquad \tau \leqslant t \leqslant 2\tau,$$

但是 $p_\varepsilon \overset{T}{\Rightarrow} p$，故 ${}_\tau p_\varepsilon \overset{T}{\Rightarrow} {}_\tau p$，从而

$$p(t) - {}_\tau p(t) \leqslant 1/e. \qquad \#$$

**推论**

设 $p \in \mathscr{P}^*(q)$，$p \sim \lambda \in \Lambda_l$，$\tau > 0$.

$$(13) \quad (1 - \lambda((0,\tau)))\, f({}_\tau\lambda, \eta) \leqslant 1/e, \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant \tau.$$

**证**：由（12）即得. #

注释

本章全部内容来自 Dai Yonglong and Zou Jiezhong(1990b)．但是这里详细补充了 § 3 引理 K 的证明.

# 第七章　标准 $p$- 函数的最大振幅问题

## §1　问题和主要结果

1．问题

令

(1)　$M_0 = \sup\,(p(t) - p(s):\ p \in \mathscr{P},\ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \infty)$.

本章的问题就是求 $M_0$的准确值．这个问题称为标准 $p$-函数的最大振幅问题．

然而在文献上，上述问题也被称为 Markov 振荡问题．这是因为，在逐点收敛拓扑意义下，$\mathscr{P}_M$ 在 $\mathscr{P}$ 中稠密，因此有

(2)　$M_0 = \sup\,(p(t) - p(s):\ p \in \mathscr{P}_M,\ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \infty)$.

由于 $p \in \mathscr{P}_M$ 正是全体标准马氏链的对角线元素，从而有上述名称．

然而，应用通常研究马氏链的方法来寻找 $M_0$的值，目前仍看不出有任何可行的办法．事实上，只是在标准 $p$-函数的一般理论建立之后，特别是有了 Kingman 不等式，人们才开始有了一些基本的方法来研究上述问题．

寻求 $M_0$的值的问题，一直是标准 $p$-函数（当然包括马氏链）理论最有兴趣的基本问题之一．然而，也许是由于工具不够，人们对上述问题的研究，一直只是停留在探索和猜测的阶段．其中最有

兴趣的结果是(见 Zou (1986)和 Dai(1987)):

$$\frac{1}{e} \leqslant M_0 \leqslant \frac{1}{2}. \tag{3}$$

本书作者近年来使用新的研究方法,即本书第五、六章以及本章的方法,终于彻底地解决了上述问题.

## 2. 主要结果

在这一章,我们将要证明

$$M_0 = \frac{1}{e}. \tag{4}$$

目前尚未找到证明(4)式的简单方法.本书用三章的篇幅来证明(4)(即第五至七章),似乎是繁琐了一些.但是这种证明过程也给了我们不少意外的收获.第五、六章主要结果本身就是很有趣的,就是在证明过程中用到的某些引理对于 $p$-函数研究也是有意义的.

下面需要用到的记号,在第五章已经提到过和使用过,为了方便,个别记号将在此重复一次.

设 $0<q<\infty$, $0<u<\infty$,令(见第五章§2)

$$\mathscr{P}(q,u) = (p \in \mathscr{P}^*(q): p(t) = e^{-q(t)}, 0 \leqslant t \leqslant u) \tag{5}$$

$$\Lambda_l(u) = (\lambda \in \Lambda_l, \lambda((0,u)) = 0) \tag{6}$$

则易知,$\mathscr{P}(q,u)$ 与 $\Lambda_l(u)$ 是一一对应的,这种对应关系就是 $p \sim \lambda$.

现设 $T \geqslant u$,令

$$M(q,u,T) = \sup\,(p(t) - p(s): u \leqslant s \leqslant t \leqslant T,\ p \in \mathscr{P}(q,u)). \tag{7}$$

为了证明(4),我们首先需要证明:

(8) $$M(q,u,T)\leqslant 1/e.$$

如果(8) 得到证明，则易知

(9) $$M(q,u,\infty)=\lim_{T\to\infty}M(q,u,T)\leqslant 1/e.$$

(9)式的相反不等式则是容易证明的. 因此我们有

(10) $$M(q,u,\infty)\leqslant 1/e.$$

由 (10) 推出(4) 则是十分容易的. 因此关键问题是证明(8).

## §2　若干引理

### 3. 一般引理

设 $\lambda\in\Lambda_l$. 如果 $\lambda$ 可以表达成

(1) $$\lambda((0,t))=\lambda_1((0,t))+\lambda_2((0,t)),$$

$$\lambda_1\in\Lambda_l,\ \lambda_2\in\Lambda_l,0\leqslant t<\infty.$$

则记 $\lambda=\lambda_1\oplus\lambda_2$. 但必须注意，$\lambda=\lambda_1\oplus\lambda_2$ 不是 $\Lambda_l$ 中两元素之和，因为 $\lambda_1((0,\infty])+\lambda_2((0,\infty])=2$. 式(1) 中的 $\lambda$ 仅仅表示 $(0,\infty)$ 上两个测度之和，而不包括$\{\infty\}$.

**引理 A**

设 $\lambda,\lambda_1,\lambda_2\in\Lambda_l$ 且 $\lambda=\lambda_1\oplus\lambda_2$. 如果 $p,p_1$ 及 $p_2\in\mathscr{D}^*(q)$且 $p\sim\lambda$, $p_1\sim\lambda_1,p_2\sim\lambda_2$，则

(2) $$p(t)\geqslant p_1(t)+\int_0^t(f(\lambda_1,t-x)\lambda_2(dx).$$

其中

(3) $$f(\lambda_1,\eta)=q\eta e^{-q\eta}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^{\eta}\frac{q^n(\eta-y)^n}{(n-1)!}e^{-q(\eta-y)}\lambda_1^{(n-1)}(dy),$$

$$\eta\geqslant 0.$$

证:由一般公式(第三章§6(12))

$$p(t)=e^{-qt}+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\frac{q^n(t-x)^n}{n!}e^{-q(t-x)}\lambda^{(n)}(dx),\qquad t\geqslant 0. \tag{4}$$

$$p_1(t)=e^{-qt}+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\frac{q^n(t-x)^n}{n!}e^{-q(t-x)}\lambda_1^{(n-1)}(dx),\quad t\geqslant 0. \tag{5}$$

当 $n=1$ 则

$$\lambda(A)=\lambda_1(A)+\lambda_2(A),\qquad A\in\mathscr{B}(0,\infty). \tag{6}$$

注意,$\mathscr{B}(0,\infty)$ 是不包括点$\infty$的,而仅是$(0,\infty)$上全体 Borel 集. 当 $n\geqslant 2$,则

$$\lambda^{(n)}(A)=(\lambda_1\oplus\lambda_2)^{(n)}(A)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\lambda_1^{(n-j)}\lambda_2^{(j)}(A) \tag{7}$$

$$\geqslant\lambda_1^{(n)}(A)+n\lambda_1^{(n-1)}(A)*\lambda_2(A),\quad A\in\mathscr{B}(0,\infty).$$

因此

$$p_1(t)-p_2(t)\geqslant\int_0^t q(t-x)e^{-q(t-x)}\lambda_2(dx)$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t-x}\frac{q^n(t-x-y)^n}{(n-1)!}e^{-q(t-x-y)}\lambda_1^{(n-1)}(dy)\lambda_2(dx)$$

$$=\int_0^t f(\lambda_1,t-x)\lambda_2(dx),\qquad t\geqslant 0.\qquad\#$$

引理 B

设 $\lambda,\lambda_1,\lambda_2\in\Lambda_l$ 且 $\lambda=\lambda_1\oplus\lambda_2,\tau>0$. 则存在 $\bar{p}\in\mathscr{P}^*(q)$ 使得

$$\bar{p}(t)={}_{\tau}\bar{p}(t)+\int_{(0,t-\tau)}f(\lambda_1,t-\tau-x)\lambda_2(dx) \tag{8}$$

$$= {}_\tau p_1(t) + \int_{(0,t-\tau)} f(\lambda_1, t-\tau-x)\lambda_2(dx),$$

$$\tau \leqslant t \leqslant 2\tau.$$

其中 $p_1 \in \mathscr{P}^*(q)$ 且 $p_1 \sim \lambda_1$，而 $f(\cdot,\cdot)$ 由 (3) 定义.

证:令

$$\tilde{\lambda}(A) = \lambda_1(A \cap (0,\tau)) + \lambda_2((A-\tau) \cap (0,\tau)) + (1-\lambda_1((0,\tau)) - \lambda_2((0,\tau)))\delta_\infty(A), \quad A \in \mathscr{B}(0,\infty]. \tag{9}$$

其中 $A-\tau = (x-\tau; x \in A)$.

现取 $\tilde{p} \in \mathscr{P}^*(q)$，使 $\tilde{p} \sim \tilde{\lambda}$. 因为在$(0,\tau)$ 上 $\tilde{\lambda} = \lambda_1$. 故 ${}_\tau\tilde{p} = {}_\tau p_1$. 于是由第五章 § 1 (16) 有

$$\tilde{p}(t) = {}_\tau\tilde{p}(t) + \int_{[\tau,t)} f({}_\tau\tilde{\lambda}, t-x)\tilde{\lambda}(dx) \tag{10}$$

$$= {}_\tau p_1(t) + \int_{[\tau,t)} f({}_\tau\tilde{\lambda}, t-x)\tilde{\lambda}(dx), \quad \tau \leqslant t \leqslant 2\tau.$$

仍然由于在$(0,\tau)$ 上，$\tilde{\lambda} = \lambda_1$，易见

$$f({}_\tau\tilde{\lambda}, \eta) = f(\tilde{\lambda}, \eta), \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant \tau. \tag{11}$$

现注意 $\tilde{\lambda}(\{\tau\}) = \lambda_2(\{0\}) = 0$，于是得

$$\tilde{p}(t) = {}_\tau p_1(t) + \int_{[\tau,t)} f(\lambda_1, t-x)\tilde{\lambda}(dx)$$

$$= {}_\tau p_1(t) + \int_{(0,t-\tau)} f(\lambda_1, t-\tau-x)\lambda_2(dx), \quad \tau \leqslant t \leqslant 2\tau. \quad \#$$

**引理 C**

设 $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in A_l$ 且 $\lambda = \lambda_1 \oplus \lambda_2$，则

$$\int_0^t f(\lambda_1, t-x)\lambda_2(dx) \leqslant 1/e, \qquad 0 \leqslant t < \infty. \tag{12}$$

证：设 $\tau>0$，由引理 B，存在 $\tilde{p}\in\mathscr{P}^*(q)$ 使

(13)
$$\tilde{p}(t)={}_\tau\tilde{p}(t)+\int_{[\tau,t)}f({}_\tau\tilde{\lambda},t-x)\tilde{\lambda}(dx)$$
$$={}_\tau\tilde{p}(t)+\int_{(0,t-\tau)}f(\lambda_1,t-\tau-x)\lambda_2(dx),$$
$$\tau\leqslant t\leqslant 2\tau.$$

其中 $\tilde{\lambda}$ 由(9) 式定义

由第六章定理 I

(14)
$$\tilde{p}(t)-{}_\tau\tilde{p}(t)\leqslant 1/e,\qquad \tau\leqslant t\leqslant 2\tau,$$

从而由 (13)、(14)，立即有（注意 $\lambda_2(\{0\})=0,f(\lambda_1,0)=0$）

$$\int_0^{t-\tau}f(\lambda_1,t-\tau-x)\lambda_2(dx)\leqslant 1/e,\qquad \tau\leqslant t\leqslant 2\tau,$$

上式即为

$$\int_0^t f(\lambda_1,t-x)\lambda_2(dx)\leqslant 1/e,\qquad 0\leqslant t\leqslant \tau.$$

然而 $\tau>0$ 是任意的，于是得(12).　#

## 4. 关于 $M(q,u,T)$ 的引理

现在叙述 $M(q,u,T)$ 的某些引理.

**引理 D**

*存在 $p\in\mathscr{P}^*(q,u)$，$t^*,T^*$ 使得*

$$u\leqslant t^*\leqslant T^*,\ p(T^*)=p(t^*)+M(q,u,T)$$

证：与第五章 §3 引理 E 的证明同.　#

**引理 E**

我们有

$$M(q,u,T+h)\leqslant M(q,u,T)+qh,\qquad u\leqslant T,h>0. \tag{15}$$

从而 $M(q,u,T)$ 是 $T$ 的连续函数.

**证**:由于对任意 $p\in\mathscr{P}^*(q)$ 有

$$|p(t)-p(s)|\leqslant q|t-s|,$$

因此,如果 $h>0$, 由定义

$$|p(t)-p(s)|\leqslant\begin{cases}M(q,u,t), & u\leqslant s\leqslant t\leqslant T,\\ q(t-T)+M(q,u,T), & u\leqslant s\leqslant T\leqslant t\leqslant T+h,\\ q(t-s), & T\leqslant s\leqslant t\leqslant\leqslant T+h.\end{cases}$$

从而得(15). #

**引理 F**

我们有:当 $T\leqslant u+(1-e^{-qu})/q$ 时:

$$M(q,u,T)\geqslant e^{-qT}+q(T-u)e^{-q(T-u)}-e^{-qu}. \tag{16}$$

当 $T\geqslant u+(1-e^{-qu})/q$ 时

$$M(q,u,T)\geqslant\exp\left(-(1-e^{-q\tau})\right)-e^{-q\tau}. \tag{17}$$

其中 $\tau$ 是下述方程的唯一解.

$$f(\tau)=\tau+(1-e^{-q\tau})/q=T. \tag{18}$$

**证**:当 $T\leqslant u+(1-e^{-qu})/q$ 时,因为$1-e^{-qu}\leqslant qu$, 故 $T\leqslant 2u$. 现取 $\lambda\in\Lambda_t$, 使 $\lambda((u))=1$, 又取 $p\in\mathscr{P}^*(q)$ ,使 $p\sim\lambda$,则 $p\in\mathscr{P}(q,u)$ ,此时

(19)　　$p(t)=e^{-qt}+q(t-u)e^{-q(t-u)},\qquad u\leqslant t\leqslant 2u.$

因为 $p'(t)=-qe^{-qt}(1-e^{qu}+q(t-u)e^{qu}),(u\leqslant t\leqslant 2u)$，$p(\cdot)$ 在 $t_0=u+q^{-1}(1-e^{qu})$ 达到最大值，$p$ 在 $[u,t_0]$ 内是严格递增的. 从而当 $T\leqslant t_0$，由定义有

$$M(q,u,T)\geqslant p(T)-e^{-qu}=e^{-qT}+q(T-u)e^{-q(T-u)}-e^{-qu}.$$

现设 $T\geqslant u+(1-e^{-qu})/q$，此时方程(18) 必有唯一解 $\tau$ 适合

(20)　　$u\leqslant\tau\leqslant T\leqslant 2\tau.$

事实上，$f'(t)=1+e^{-qt}>0$，从而 $f(\cdot)$ 是严格递增的. 然而 $f(0)=0$，$f(\infty)=\infty$. 从而 $f(t)=T$ 有唯一解 $\tau$，易见 $\tau$ 适合 (20).

现取 $\lambda\in\Lambda_t, p\in\mathscr{D}^*(q)$ 使得 $\lambda((\tau))=1$ 且 $p\sim\lambda$. 由于 $\tau\leqslant T\leqslant 2\tau$，故

(21)　　$p(T)=e^{-qT}+q(T-\tau)e^{-q(T-\tau)}.$

以 $T=\tau+(1-e^{-q\tau})/q$ 代入 (21) 得

(22)　　$p(T)=\exp(-(1-e^{-q\tau}))$

然而 $p(\tau)=e^{-q\tau}$，因此由 $M(q,u,T)$ 的定义得

$$M(q,u,T)\geqslant p(T)-p(\tau)=\exp(-(1-e^{-q\tau}))-e^{-q\tau}.\qquad \#$$

**推论**

我们有

(23)　　$M(q,u,\infty)\geqslant 1/e.$

证：由 (17) 并注意 $\tau\leqslant T\leqslant 2\tau$，令 $T\to\infty$ 得

(24)　　$M(q,u,\infty)=\lim\limits_{T\to\infty}M(q,u,T)\geqslant 1/e.\qquad \#$

现在令

(25) $\alpha(q,u) = (T \in [u,\infty]: M(q,u,T) > M(q,u,\tau),$

$u \leqslant \tau < T).$

**引理 G**

设 $T \in \alpha(q,u)$，则存在 $p \in \mathscr{P}(q,u)$ 及 $\tau$ 使

(26) $u \leqslant \tau < T, \qquad p(T) = p(\tau) + M(q,u,T).$

且

(27) $p(\tau) < p(t) < p(T), \qquad \tau < t < T.$

证：由引理 D，存在 $p \in \mathscr{P}(q,u)$，$t^*$，$T^*$ 使

(28) $u \leqslant t^* \leqslant T^* \leqslant T, \quad p(T^*) = t^* + M(q,u,T).$

现在 $T \in \alpha(q,u)$，由定义知必有 $T^* = T$. 现令

(29) $\tau = \sup\ (t^*: \ p(T) = p(t^*) + M(q,u,T),\ t^* < T).$

由引理 F，当 $T > u$，$M(q,u,T) > 0$. 因此 $\tau < T$. 从而对上述 $p$，$\tau$，(26)和(27) 必然成立. #

**引理 H**

设 $T \in \alpha(q,u)$，$p \in \mathscr{P}(q,u)$. 又设 $u \leqslant \tau < T$ 适合条件(26)、(27). 现在固定 $p,\tau$. 按照第五章 §2 (2) 式定义 $L(p,\tau,T)$，和第五章 §4 (13) 式定义 $A(p,\tau)$，则有

(30) $p(T) = L(p,\tau,T)\ ;\ T \in A(p,\tau)\ ;\ T < 3\tau.$

证：由定义立即得(30) 中前两关系. $T < 3\tau$ 由第五章 §4 引理 E 得知. #

# §3 主要结果的证明及其推论

## 5. 主要结果的证明

在证明本章的主要结果之前，再证明一个 $p$-函数的基本引理.

### 引理

设 $p\in\mathscr{P}^*(q)$，$\lambda\in\Lambda_l$ 且 $p\sim\lambda$. 如果存在 $s,t$ 使得 $s>0,t>0$ 且 $\lambda([t,t+s])=0$，则或者

(1) $$p(t+s)\leqslant p(t),$$

或者存在 $t_0$ 使

(2) $$0<t_0<t,\quad p(t+s)-p(t)\leqslant p(t_0+s)-p(t_0).$$

证：由第三章 §6 定理 XI 知

(3) $$D_+ p(t)=-q\Big(p(t)-\int_{(0,t]}p(t-h)\lambda(dh)\Big),\qquad t\geqslant 0.$$

因此也有

(4) $$D_+ p(t+s)=-q\Big(p(t+s)-\int_{(0,t+s]}p(t+s-h)\lambda(dh)\Big),\qquad t\geqslant 0,s\geqslant 0.$$

但由引理条件 $\lambda([t,t+s])=0$，从而有

(5) $$D_+(p(t+s)-p(t))=-q\{(p(t+s)-p(t))-\int_{(0,t]}(p(t+s-h)-p(t-h))\lambda(dh)\}.$$

如果 (2) 不成立，即有

(6) $p(t+s)-p(t)>p(\tau+s)-p(\tau), \qquad 0<\tau<t.$

如果 (1) 不成立,即

(7) $$p(t+s)-p(t)>0.$$

由 (5)、(6)、(7) 必有

(8) $$\begin{aligned}0&<p(t+s)-p(t)\\&\leqslant\int_{(0,t)}(p(t+s-h)-p(t-h))\lambda(dh)\end{aligned}$$

而由(8),必存在 $t_0$, $0<t_0<t$ 使

(9) $$p(t+s)-p(t)\leqslant p(t_0+s)-p(t_0).$$

而引出了矛盾((9) 与(6) 矛盾). 因此(6)、(7) 至少有一式不成立,即(1)、(2) 至少有一个成立. #

**定理** I

(10) $$M(q,u,T)\leqslant 1/e, \qquad T\geqslant u\ .$$

证:将证明分成下面几步.

1) $M(q,u,T)$ 显然是 $T$ 的不减函数,由 §2 引理 E 知,它也是 $T$ 的连续函数. 因此不失一般性,可假定 $T\in a(q,u)$.

2) 现设 $T\in a(q,u)$. 由 §2 引理 G ,存在 $p\in\mathscr{P}(q,u)$ 和 $\tau$ 使得

(11) $$u\leqslant\tau<T\ ,\ p(T)=p(\tau)+M(q,u,T)\ .$$

下面取 $\lambda\in A_I$, 使 $p\sim\lambda$.

3) 由 §2 引理 H ,我们有

(12) $$p(T)=L(p,\tau,T)\ ;\ T\in A(p,\tau);\ T<3\tau.$$

4) 如果 $\tau\leqslant T\leqslant 2\tau$ ,则由第五章定理 N ,存在 $\tau^*$,使 $\tau\leqslant\tau^*<$

$T$ 且

(13)　　$p(T) = {}_{\tau}p(T) + (1 - \lambda((0,\tau)))f({}_{\tau}\lambda, T - \tau^*)$.

如果 $2\tau < T < 3\tau$，仍由第五章定理 Ⅳ，存在 $\tau^*$，和 $T - \tau \leqslant \tau^* < T$，使 (13) 式成立.

5) 由 ${}_{\tau}\lambda$ 的定义，${}_{\tau}\lambda([\tau,T]) = {}_{\tau}\lambda([\tau,\infty)) = 0$. 因此由本节的引理知，或者

(14)　　$${}_{\tau}p(T) \leqslant {}_{\tau}p(\tau),$$

或者存在 $t_0$，使 $0 < t_0 < \tau$，且

(15)　　$${}_{\tau}p(t_0 + T - \tau) - {}_{\tau}p(t_0) \geqslant {}_{\tau}p(T) - {}_{\tau}p(\tau)$$

现在就 (14) 与 (15) 分两种情形讨论.

6) 如果(14) 成立，则由 ${}_{\tau}p(\tau) = p(\tau)$ 和(11)、(13) 我们得

(16)　　$p(T) \leqslant p(\tau) + (1 - \lambda((0,\tau)))f({}_{\tau}\lambda, T - \tau^*)$.

以及

(17)　　$$p(T) = p(\tau) + M(q,u,T).$$

比较 (16)、(17) 得

(18)　　$M(q,u,T) \leqslant (1 - \lambda((0,\tau)))f({}_{\tau}\lambda, T - \tau^*)$.

现由 §2 引理 C 得

(19)　　$$M(q,u,T) \leqslant 1/e.$$

7) 现设(15) 成立. 在这一情形，令

(20)　　$$\lambda_1 = {}_{\tau}\lambda$$

并令 $\lambda_2$ 如下：对任意 $A \in \mathscr{B}(0,\infty]$，令

(21)　$\lambda_2(A) = (1 - {}_{\tau}\lambda((0,\tau)))\delta_{t_0+\tau^*-\tau}(A) + {}_{\tau}\lambda((0,\tau))\delta_{\infty}(A)$.

显然，$\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_l$ 且

$$\lambda_1((0,t)) + \lambda_2((0,t)) \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant t < \infty.$$

因此我们可以取 $\bar{\lambda} \in \Lambda_l$，$\bar{\lambda} = \lambda_1 \oplus \lambda_2$. 现取 $\bar{p} \in \mathscr{P}^*(q)$，使得 $\bar{p} \sim \bar{\lambda}$.

又因 $\lambda_1 \in \Lambda_1(u)$，取 $p_1 \in \mathscr{P}(q,u)$ 使 $p_1 \sim \lambda_1$. 由§2 引理 A

(22) $$\tilde{p}(t) \geqslant {}_{\tau}p(t) + \int_0^t f({}_{\tau}\lambda, t-x)\lambda_2(dx).$$

再由 (21) 得，当 $t \geqslant t_0 + \tau^* - \tau$ 时有

(23) $$\tilde{p}(t) \geqslant {}_{\tau}p(t) + (1 - {}_{\tau}\lambda((0,\tau)))f({}_{\tau}\lambda, t - t_0 - \tau^* + \tau).$$

特别我们取 $t = t_0 + T - \tau$ 得

(24) $$\tilde{p}(t_0 + T - \tau) \geqslant {}_{\tau}p(t_0 + T - \tau) + (1 - {}_{\tau}\lambda((0,\tau)))f({}_{\tau}\lambda, T - \tau^*).$$

因此，由 $t_0 < \tau \leqslant \tau^*$ 得 $\tilde{p}(t_0) \geqslant {}_{\tau}p(t_0)$，从而由(24) 得

(25) $$\begin{aligned}\tilde{p}(t_0 + T - \tau) - \tilde{p}(t_0) &= \tilde{p}(t_0 + T - \tau) - {}_{\tau}p(t_0) \\ &\geqslant {}_{\tau}p(t_0 + T - \tau) \\ &\quad - {}_{\tau}p(t_0) + (1 - {}_{\tau}\lambda((0,\tau)))f({}_{\tau}\lambda, T - \tau^*).\end{aligned}$$

于是由 (15) 及 (25) 得

(26) $$\tilde{p}(t_0 + T - \tau) - \tilde{p}(t_0) \geqslant {}_{\tau}p(T) - {}_{\tau}p(\tau) + (1 - {}_{\tau}\lambda((0,\tau)))f({}_{\tau}\lambda, T - \tau^*).$$

然而由 (13) 我们得

(27) $$\tilde{p}(t_0 + T - \tau) - \tilde{p}(t_0) \geqslant p(T) - {}_{\tau}p(\tau) = p(T) - p(\tau).$$

最后由 (27) 与(11) 得

(28) $$\tilde{p}(t_0 + T - \tau) - \tilde{p}(t_0) \geqslant M(q,u,T).$$

现在只有两种可能：

第一个可能情形是：$t_0 \geqslant u$. 如果是这种情形，则 $\tilde{p} \in \mathscr{P}(q,u)$，因为 $t_0 + T - \tau < T$ 及 $T \in a(q,u)$，由定义必有

(29) $$\begin{aligned}M(q,u,T) &> M(q,u,t_0 + T - \tau) \\ &\geqslant \tilde{p}(t_0 + T - \tau) - \tilde{p}(t_0).\end{aligned}$$

此与(28)矛盾，因此只能有 $t_0 < u$.

第二个可能的情形是 $t_0 < u$：在此情形下，$\tilde{p}(t_0) = e^{-qt_0}$. 即 $\tilde{p} \in$

$\mathscr{P}(q,t_0)$. 由第五章定理 V 的推论有

(30) $$\tilde{p}(t_0+T-\tau)\leqslant \exp\left(-\left(1-e^{-qt_0}\right)\right).$$

因此由 (28)、(30) 得

$$M(q,u,T)\leqslant \exp\left(-\left(1-e^{-qt_0}\right)\right)-e^{-qt_0}\leqslant 1/e. \qquad \#$$

## 6. 主要结果的若干推论

定理 Ⅰ 是我们的主要结果. 也是本书最重要的结果. 下面的几个结论都只是它的推论而已. 然而正是下述推论才是我们研究的最终目标. 因此将它们写成定理的形式.

**定理 Ⅱ**

(31) $$M(q,u,\infty)=1/e.$$

**证**: 在定理 Ⅰ 中, 令 $T\to\infty$ 得

$$M(q,u,\infty)\leqslant 1/e,$$

再由 §2 引理 F 的推论就得(31). #

**定理 Ⅲ**

对任意 $p\in\mathscr{P}$, 我们有

(32) $$p(t)\leqslant p(s)+1/e, \qquad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant\infty.$$

**证**: 由定理 Ⅰ, 对一切 $q,u>0$ 有

$$M(q,u,\infty)\leqslant 1/e.$$

于是对一切 $p\in\mathscr{P}(q,u)$ 有

(33) $$p(t)\leqslant p(s)+1/e.$$

(33) 与 $q$ 无关,从而对一切 $p\in\mathscr{P}(u)$ , (33) 亦成立.

现设 $p\in\mathscr{P}$ ,并取 $\mu\in\Lambda$ 使 $p\sim\mu$. 对任意 $n\in N$ ,令

(34) $$\mu_n(A)=\mu\left(A\cap\left(\frac{1}{n},\infty\right]\right),\qquad A\in\mathscr{B}(0,\infty].$$

取 $p_n\in\mathscr{P}\left(\frac{1}{n}\right)$, 使 $p_n\sim\mu_n$. 则由(33)

$$p_n(t)\leqslant p_n(s)+1/e.$$

易知 $p_n\overset{T}{\Rightarrow}p$. 于是有

$$p(t)\leqslant p(s)+1/e,\qquad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant\infty.$$ #

**定理 Ⅳ**

(35) $$M_0=1/e.$$

其中 $M_0$ 由 §1 (1) 式定义.

**证**:由定理 Ⅰ 知 $M_0\geqslant 1/e$, 由定理 Ⅲ 知 $M_0\leqslant 1/e$. #

**定理 Ⅴ** ( R. Davidson **猜测**)

(36) $$I_\infty(M)\geqslant M-1/e,\qquad 0<M\leqslant 1.$$

(37) $$v_\infty=1/e.$$

其中 $I_\infty(M)$ 的定义见第四章 §1 (12), 而 $v_\infty$ 见第四章 §1 (20).

**证**:设 $p\sim\mathscr{P}$, 且 $p(1)=M$. 于是由定理 Ⅲ

$$m(p)=\inf\ (p(t):0\leqslant t\leqslant 1\ )\geqslant M-1/e.$$

从而由 $I_\infty(M)$ 的定义得 (36). 由 (36) 及 $v_\infty(M)$ 的定义得 (37). #

# §4　问题

问题

猜测:对任意 $p\in\mathscr{P}$, 成立

(1) $$p(t)\leqslant e^{-(1-p(s))},\qquad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant\infty.$$

由于 $e^{-(1-x)}<x+e^{-1}(0<x\leqslant 1)$ ,因此 (1) 是定理Ⅱ 的改进. 但是作为最大振幅问题,定理 Ⅰ、Ⅱ 已经不能改进了.

如果(1) 获证,将最后解决第四章 §1 提出的 $(m,M)$ 图问题,也就是说,从(1) 可以获得如下结论:设 $(m,M)\in[0,1]\times[0,1]$,如果

(2) $$M\leqslant e^{-(1-m)}.$$

则 $(m,M)$ 是 $\mathscr{P}$-可及点( 定义见第四章 §1 ,注意 $\mathscr{K}_\infty=\mathscr{P}$). 如果

(3) $$M>e^{-(1-m)}.$$

则 $(m,M)$ 是 $\mathscr{P}$-不可及点 ,因此曲线

(4) $$M=e^{-(1-m)}.$$

将 $[0,1]\times[0,1]$ 分成两个区域,区域 (2) 是可及点区域,而 (3) 是不可及点区域.

## 注释

本章结果全部来自 Dai (1991b).

# 参考文献


M. S. Bartlett (1953). Recurrence and first passage time. Proc. Cam. Phil. Soc. 49 : 263～275.

P. Billingsley (1968). Convergence of Probability Measures. Wiley, New York.

N. H. Bingham (1972). Limit theorems for regenerative phenomena, recurrent events and renewal theory. Ztschr. Wahrsch' theorie & verw. Geb. 21: 20～44.

N. H. Bingham (1973). Limit theorems for a class of Markov processes. Stochastic Analysis (ed. D. G. Kendall and E. F. Harding), Wiley, London. 266～293.

D. Blackwell and D. Freedman (1968). On the local behaviour of Markov transition probabilities. Ann. Math. Stat. 39: 2123～2127.

P. Bloomfield (1971). Lower bounds for renewal sequences and $p$-functions. Ztschr. Wahrsch' theorie & verw. Geb. 19: 271～273.

P. Bloomfield (1973). Stochastic inequalities for regenerative phenomena. Stochastic Analysis (ed. D. G. Kendall and E. F. Harding). Wiley, London. 226～233.

Chen Zaif (陈在夫) (1988). Delphic 半群与延迟更新序列. 应用概率统计. 4: 279～286.

K. L. Chung (1967). Markov Chains With Stationary Transition Probabilities. Springer, Berlin.

A. G. Cornish. (1973a). Bounds for $p$-functions. Bull. London Math. Soc. 5: 169～175.

A. G. Cornish (1973b). Measurable semi-$p$-functions. Bull. London Math. Soc. 5: 91～99.

A. G. Cornish (1987). V. M. Joshi and the Markov oscillation problem. Applied Probability, Stochastic Processes and Sampling Theory. (ed. I. B. MacNeill and G. J. Umphrey), D, Reidel Publishing Company. 1～7.

D. R. Cox (1962). Renewal Theory, Methuen, London.

Dai Yonglong(戴永隆) (1987). 关于 Kingman 不等式. 中山大学学报(自然科学版). 第 4 期:1～4.

Dai Yonglong (1989). 起始为指数律的 $p$-函数的振荡问题. 应用概率统计. 5:161～172

Dai Yonglong (1991a). P-函数的最大值问题, 应用概率统计. 7:311～322.

Dai Yonglong (1991b). P-函数的最大振幅问题, 应用概率统计. 7:415～424.

Dai Yonglong (1991c). The Markov oscillation problem(to appear).

Dai Yonglong and Zou Jiezhong(戴永隆, 邹捷中) (1990a). P-函数的振动问题(Ⅰ). 应用概率统计. 6:77～88.

Dai Yonglong and Zou Jiezhong(戴永隆, 邹捷中) (1990b). P-函数的振动问题(Ⅱ). 应用概率统计. 6:161～173.

Dai Yonglong and Zou Jiezhong(戴永隆, 邹捷中) (1990c). P-函数的振动问题(Ⅲ). 应用概率统计. 6:302～308.

D. J. Daley (1965). On a class of renewal functions, Proc. Cam. Phil. Soc. 61:519～526.

R. Davidson (1968). Arithmetic and other properties of certain Delphic semigroups, Ztschr. Wahrsch' theorie & verw. Geb. 10:120～172.

R. Davidson (1969). More Delphic theory and practice, Ztschr. Wahrsch'-theorie & verw. Geb. 13:191～203.

R. Davidson (1973a). Another approach to one of Bloomfield's inequalities. Stochastic Analysis (ed. D. G. Kendall and E. F. Harding). Wiley, London. 223～225.

R. Davidson (1973b). Smith's phenomenon, and 'jump' $p$-functions. Stochstic Analysis(ed. D. G. Kendall and E. F. Harding), Wiley, London. 234～239.

R. Davidson and D. G. Kendall (1973). On partly exponential $p$-functions, and 'identifying' skeletons, Stochastic Analysis(ed. D. G. Kendall and E. F. Harding), Wiley, London. 1973:248～251.

W. Feller (1949). Fluctuation theory of recurrent events, Trans. Amer. Math. Soc. 67 :98～119.

W. Feller (1950). An Introduction to Probability Theory and its Appli cations, Wiley, New Youk .

W. Feller (1966a). An introduction to Probability Theory and its Applications, Volume 2, Wiley ,New York.

W. Feller (1966b). On the Fourier representation for Markov chains and the strong ratio theorem J. Math. Mech. 15 :273～283.

W,Feller and S. Orey (1961). A renewal theorem, J. Math. Mech. 10: 619～624.

D. Griffeath (1973). The maximal oscillation problem for regenerative phenomena, Ann. Prob. 1 : 405～416.

D. Griffeath (1974). Inequalities for oscillating $p$-functions, Bull. London Math. Soc. 6 : 51～56.

D. Griffeath (1976). On $p$-functions with exponential start. J. London Math. Soc. 14 : 445～450.

He Yuanjiang(何远江) (1984). 关于 Delphic 半群,数学年刊. 5A,691～696.

He Yuanjiang (1989). MD-semigroups, decomposition of point processes, central limit theorems for certain $T_2$-semigroups, Lecture Notes in Math. 1379 : 107～124.

Hou Zhennting (侯振挺)(1982a). 更新序列对于圈乘运算的封闭性,中国科学 A 辑,31～39.

Hou Zhennting (侯振挺)(1982b). Q过程的唯一性准则,湖南科学技术出版社.

V. M. Joshi (1975). A new bound for standard $p$-functions, Ann. Prob. 3 : 346～352.

V. M. Joshi (1977a). An improved upper bound for standard $p$-functions,

Ann. Prob. 5 : 999～1003.

V. M. Joshi (1977b). An upper bound for exponentially starting standard p-functions. Sankhya, Series A, 39 : 334～340.

V. M. Joshi (1981). A generalization of Davidson's upper bound for standard jump p- frnctions. Journal of the Indian Statistical Association 19 : 69～76.

T. Kaluza (1928). Über die Koeffizienten reziproker Potenzreihen ,Math. Z. 28: 161～170.

D. G. Kendall(1965). On the behaviour of a standard Markov transition function near t=0, Ztschr. Wahrsch' theofie & verw. Geb. 3 : 276～278.

D. G. Kendall (1967). Some recent advances in the theory of denumerable Markov processes, Trans. 4th Prague Conf. On Information Theory etc. 11～17.

D. G. Kendall (1973a). Renewal sequences and their arithmetic, Stochastic Analysis (ed. D. G. Kendall and E. F. Harding), Wiley, London. 46～72.

D. G. Kendall(1968). Delphic semigroups, infinitely divisible regenerative phenomena, and the arithmetic of p- functions, Ztschr. Wahrsch' theorie & verw. Geb. 9 : 163～195.

D. G. Kendall(1973b). On the non-occurrence of regenerative phenomenon in given intervals, Stochastic Analysis (ed. D. G. Kendall and E. F. Harding), Wiley, London. 295～308.

D. G. Kendall and E. F. Harding (eds.) (1973). Stochastic Analysis, Wiley, London .

J. F. C. Kingman (1963). A continuous time analogue of the theory of recurrent events, Bull. Amer. Math. Soc. 69 : 268～272.

J. F. C. Kingman (1964). The stochastic theory of regenerative events, Ztschr. Wahrsch' theorie & verw. Geb. 2 : 180～224.

J. F. C. Kingman (1965a). Linked systems of regenerative events, Proc. Lond. Math. Soc. 15 : 125～150.

J. F. C. Kingman (1965b). Some further analytical results in the theory of. re-

generative events, J. Math. Analysis Appl. 11 : 422～433.

J. F. C. Kingman (1966). An approach to the study of Markov processes, J. R. Stat. Soc. B 28 : 417～447.

J. F. C. Kingman (1968). On measurable $p$-functions, Ztschr. Wahrsch' theorie & verw. Geb. 11 : 1～8.

J. F. C. Kingman (1970a). Stationary regenerative phenomena, Ztschr. Wahrsch'-theorie & verw. Geb. 15 : 1～18.

J. F. C. Kingman (1970b). An application of the theory of regenerative phenomena, Proc. Cam. Phil. Soc. 68 : 697～701.

J. F. C. Kingman (1971). Markov transition probabilities (5), Ztschr. Wahrsch'-theorie & verw. Geb17 : 89～103.

J. F. C. Kingman (1972). Regenerative phenomena, Wiley, London.

J. F. C. Kingman (1983). Three unsolved problems in discrete Markov theory, London Math. Soc. Lecture Notes Series 79, Cambridge Univ. Press: 180～191.

A. M. sykes (1973). Multiplicative semigroups and $p$-functions, Stochastic Analysis(ed. D. G. Kendall and E. F. Harding), Wiley, London. 252～265.

Wang Boying(王伯英)(1983). 更新序列圈乘运算封闭性的一个证明,科学通报,28:1414～1416.

T. Yamada (1968). ε-Regenerative phenomena in some stochastic processes, kôdai Math. Sem. Rep. 20:76～93.

Yang Xiangqun(杨向群)(1986). 可列马尔科夫过程构造论,,湖南科学技术出版社,第二版.

Yu Yaoqi(余耀祈)(1984). 标准 $p$-函数的界的新结果,数学年刊, 5A. 473～482.

Zou Jiezhong(邹捷中)(1986). $p$-函数的振荡问题,博士论文,长沙铁道学院.

Zou Jiezhong(邹捷中)(1989). $p$-函数的极大振荡问题,中国科学 A 辑. 113～120.

# 符号索引